

THÈSE

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir le Grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Claude CHÈZE

CONTRIBUTION A L'ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE
DES VIBRATIONS DES POUTRES FLOTTANTES PRISMATIQUES

Soutenue le 1^{er} Mars 1969 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. RAVILLY Examineur

M. GUÉVEL Examineur

THÈSE

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir le Grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Claude CHÈZE

CONTRIBUTION A L'ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE
DES VIBRATIONS DES POUTRES FLOTTANTES PRISMATIQUES

Soutenue le 1^{er} Mars 1969 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. RAVILLY Examineur

M. GUÉVEL Examineur

FACULTE DES SCIENCES DE NANTES

DOYEN

M. DUNOYER DE SEGONZAC Chimie

ASSESSEUR

M. SELLIER

Zoologie

PROFESSEURS

M. PAUC	Mathématiques	M. BOULLLOUD (CSU)	Physique
M. RAVILLY (ENSM)	Mécanique	Mlle. DEBRAUX	Botanique
M. RAFFIN	Mécanique	M. PETRESCO	Mathématiques
M. GARRIGUES	Biologie végétale	M. PIERI	Biologie animale
M. BRILLOUET	Analyse numérique	M. WOJTKOWIAK	Chimie
M. GRAFF	Chimie	M. AVIGNON	Physique
M. VIVIER (ENSM)	Maths appliqués	M. MOUTON	Physique
M. COLLET	Physique		

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. GOBIN (ENSM)	Chimie	M. DUPONT	Biologie animale
M. CAVET	Sciences de la terre	M. ROUXEL	Chimie
M. OTTMANN	Sciences de la terre	M. MINN	Physique
M. MEZENCEV (ENSM)	Physique	M. QUINIOU	Chimie
M. MOLINARO	Mathématiques	Mlle. OFFRET (ENSM)	Physique



MAITRE DE CONFERENCES

M. FORESTIER	Sciences de la terre	M. GUEVEL (ENSM)	Mathématiques
M. LASKAR	Physique	M. GOVIN (CSU)	Chimie
M. SAUDRAY	Biologie animale	M. POINTEAU (ENSM)	Chimie
M. MARTIN	Chimie	M. SULMONT (ENSM)	Mathématiques
M. GOUREAUX	Physique	M. BARDON	Physique
M. LE DOUARIN G.	Biologie végétale	M. LONCKE	Physique
M. AMOURIQ	Psychophysiologie	M. LEBRUN	Biologie animale
Mlle ASTIE (CSU)	Botanique	M. CORBEL (CSU)	Biologie animale
M. LAMEAU (ENSM)	Mathématiques	M. JONARD	Biologie végétale
Mme LE DOUARIN N.	Biologie végétale	M. FOUQUES	Mathématiques
M. TOURNOUX	Chimie minérale	M. IBISCH	Maître de Conférences associé

Secrétaire de la Faculté :

M. PAILLET Attaché principal

Claude CHEZE

CONTRIBUTION A L'ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE
DES VIBRATIONS DES POUTRES FLOTTANTES PRISMATIQUES

*A la mémoire de mon Père
et à ma Mère*

A ma Femme

INTRODUCTION

En étudiant les vibrations de flexion des poutres prismatiques flottant à la surface d'un liquide, nous avons voulu apporter une modeste contribution à l'étude du vaste problème des vibrations des navires.

De nombreux chercheurs se sont penchés sur différents aspects de ce problème depuis qu'il se pose, c'est-à-dire, en fait, depuis que les bateaux sont mus par des machines susceptibles de faire entrer leur structure en résonance dans des conditions déterminées. Les très nombreux résultats obtenus permettent de prévoir les fréquences d'une coque avec une bonne précision, mais au prix de calculs assez longs.

Or, cette prévision est indispensable pour le constructeur naval, et elle doit être faite dès l'élaboration de l'avant-projet de construction. En effet, pour éviter que des vibrations d'amplitude désagréable gênent les conditions normales d'utilisation, le meilleur moyen est de déplacer les fréquences de résonance. Comme il est pratiquement impossible de modifier de façon notable ces fréquences, quand le bateau est construit, il faut pouvoir agir lors de la construction et pour cela il faut pouvoir les prévoir dès l'étude préliminaire.

Le point de départ pour l'étude d'un bateau est évidemment un schéma simplifié au maximum et le plus simple de tous est celui constitué par une poutre droite de section constante. Toutes les études sont parties de ce modèle. On considère d'abord une poutre libre, puis on passe au cas de la poutre complètement immergée pour en venir au cas de la poutre flottante en faisant certaines hypothèses. Il convient encore de tenir compte ensuite des différents phénomènes négligés tels que variation de la forme de la section, mouvement tridimensionnel du liquide, surface libre de l'eau et déformation de celle-ci... qui interviennent sous la forme d'autant de facteurs correctifs.

Mais, même dans le cas simple de la poutre flottante de section constante, il a semblé à Monsieur le Recteur PIRONNEAU (alors Directeur de l'E.N.S.M.) qu'il serait souhaitable de préciser nettement les résultats et éventuellement de les justifier au moyen d'un modèle mathématique simple. En particulier, le cas des poutres prismatiques, faciles à réaliser matériellement et à expérimenter, a en fait, été peu étudié théoriquement.

Suivant les conseils et sous la direction attentive de Monsieur le Recteur PIRONNEAU, nous avons donc repris complètement l'étude du cas particulier des poutres prismatiques flottantes. Nous nous sommes attachés directement au problème des poutres flottantes sans passer par l'intermédiaire des poutres complètement immergées et sans poser à priori, la notion habituelle de masse virtuelle pour interpréter l'influence du liquide.

La prévision des périodes de résonance de telles poutres est un problème de mécanique. Comme tel, nous l'avons abordé par deux voies différentes, l'une expérimentale et l'autre théorique et nous avons confronté les résultats correspondants.

L'étude expérimentale préliminaire a été entreprise avec une double intention :

- d'une part, nous voulions préciser et délimiter nettement le problème

- d'autre part, nous voulions fournir des résultats empiriques et nous espérons que ces résultats puissent ultérieurement être utilisés directement.

Or, à cet égard, les résultats expérimentaux que nous avons obtenus sont très nets et spectaculaires. Ils peuvent être traduits par une formule empirique extrêmement simple. Sa forme originale la différencie nettement de toutes celles déjà proposées et elle couvre dans de très bonnes conditions, des résultats portant sur un domaine d'expérimentation très étendu.

L'étude théorique a eu pour objectif de donner une expression rationnelle correspondant à l'expression empirique précédente. Cette expression a effectivement été obtenue en étudiant l'écoulement du liquide autour de la poutre vibrante et en explicitant l'action du liquide sur la poutre, dans cet écoulement. Cette méthode directe pouvait être employée puisque nous nous sommes limités au cas de la poutre de section constante. Elle nous semble traduire le phénomène physique de plus près que les méthodes énergétiques globales nécessitant un calcul d'énergie cinétique pour un domaine fluide infini. Elle évite surtout de poser à priori la notion de masse virtuelle et elle est applicable directement, sans passer par l'intermédiaire d'une poutre complètement immergée.

L'expression que nous avons ainsi obtenue est d'ailleurs conforme à la notion de masse virtuelle.

De plus, cette expression admet, dans un large domaine l'expression empirique précédente comme première approximation.

Notre expression théorique obtenue, nous avons voulu comparer les résultats qu'on en déduit à ceux de l'expérience. Nous rendons donc compte de cette confrontation dans des cas très divers et en particulier lors d'une expérimentation sur des poutres de grandes dimensions, telles qu'une péniche.

L'étude théorique et l'étude expérimentale ont aussi été effectuées dans le cas de poutres de section triangulaire de la même manière.

Enfin, comme cette étude a été faite en formulant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, nous nous sommes attachés à préciser l'influence séparée des différents termes négligés afin d'en tenir compte éventuellement sous forme de termes correctifs.

C'est de l'ensemble de ce travail théorique et expérimental que nous rendons compte ici.

Ce travail a pu être mené à bien grâce à la bienveillante attention de Monsieur le Recteur PIRONNEAU qui l'a d'abord inspiré, puis à bien voulu en suivre très attentivement le déroulement et enfin l'a honoré en présidant le Jury chargé de l'examiner. Nous prions Monsieur le Recteur PIRONNEAU de bien vouloir accepter nos très vifs remerciements et l'expression de notre profonde gratitude.

Nous prions aussi Monsieur le Professeur RAVILLY d'agréer nos remerciements pour avoir bien voulu accepter de participer au Jury et pour nous avoir aimablement permis d'utiliser des installations de son laboratoire de Mécanique des Fluides à l'E.N.S.M.

Nos vifs remerciements vont aussi à Monsieur GUEVEL Maître de conférences à l'E.N.S.M. qui a bien voulu nous consacrer une partie de son temps et nous prodiguer de précieux conseils qui ont permis la réalisation de ce travail qu'il a également accepté de juger.

La partie expérimentale a pu être effectuée dans les laboratoires de l'E.N.S.M. grâce à l'amabilité de tous, et en particulier de Monsieur DOSGHEAS Maître-Assistant au Laboratoire de Vibrations-Mécanique des Structures, que nous remercions pour sa collaboration cordiale et efficace.

Nous remercions également Monsieur D'HERVE et les responsables au Centre de Calcul Scientifique de l'E.N.S.M. qui ont calculé numériquement nos différentes intégrales.

Nous remercions encore les Services des Ponts et Chaussées du Pellerin qui ont accepté de nous prêter une péniche sur laquelle ils ont facilité notre expérimentation.

Enfin, nous remercions le personnel technique de l'I. U. T. de Brest qui a consciencieusement contribué à la présentation matérielle de ce travail

CHAPITRE I

-:-:-:-

A P P R O C H E E X P E R I M E N T A L E

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

SOMMAIRE

=====

1. Introduction

2. Matériel. Méthode expérimentale

- 21. Matériel expérimental
- 22. Obtention des vibrations
- 23. Mesures

3. Influence de l'eau sur l'amortissement

- 31. Essais effectués
- 32. Courbes de résonance
- 33. Conclusions

4. Essais systématiques en fonction des dimensions de la poutre

- 41. Les essais
- 42. Vibrations dans l'air
- 43. Vibrations à la surface de l'eau

5. Résultats des essais

- 51. Périodes de résonance en fonction de la longueur
- 52. Périodes de résonance en fonction de la largeur
- 53. Périodes de résonance en fonction de la hauteur
- 54. Périodes de résonance en fonction de l'immersion

6. Interprétation des résultats - Conclusion

I. INTRODUCTION

Pour aborder le problème de la détermination des périodes de résonance des poutres droites de section rectangulaire constante flottant à la surface d'un liquide, nous avons voulu, comme pour tout problème de mécanique, partir de l'expérience, afin de bien définir le problème. Il convient en effet de constater exactement le phénomène, avant de l'expliquer.

La théorie interviendra ensuite pour tenter d'expliquer le phénomène en en donnant une image mathématique susceptible d'être traitée rationnellement.

La constatation du phénomène permet d'ailleurs, sans l'expliquer, de le prévoir. Les résultats expérimentaux sont donc intéressants aussi dans la mesure où, à eux seuls, ils permettent d'établir une loi empirique, qui même dépourvue de base rigoureuse, peut donner lieu à des applications pratiques.

L'étude expérimentale préliminaire que nous nous proposons d'effectuer dans ces conditions doit tenir compte des différents paramètres susceptibles de jouer un rôle et elle doit permettre de préciser numériquement l'influence de chacun d'eux. Nous nous limitons ici au cas des poutres droites de section rectangulaire constante. Nous admettons les résultats classiques établis pour les poutres libres. Mais une poutre flottante n'est pas une poutre libre, puisqu'elle est soumise sur toute sa longueur à l'action du liquide sur lequel elle flotte.

Pour rattacher le cas de la poutre flottante à celui de la poutre libre, il est classique de considérer qu'il suffit de traduire l'action du liquide sur la poutre en considérant qu'une partie de ce liquide est entraînée par la poutre dans son mouvement ; on nomme masse fictive ajoutée cette masse du liquide supposée entraînée. Il suffit alors dans les différentes équations établies pour les poutres libres de remplacer la masse de la poutre par une "masse virtuelle" qui serait la somme de la masse réelle de la poutre et de la masse fictive ajoutée. Si on admet à priori cette notion de masse virtuelle, le problème de la détermination des périodes de résonance de la poutre flottante se ramène simplement à celui du calcul de la masse fictive ajoutée. L'étude expérimentale envisagée serait, avec cette hypothèse,

la détermination de la masse fictive ajoutée en fonction des différents paramètres de la poutre.

Dans ces conditions, pourquoi passer par l'intermédiaire des notions, non indispensables et quelque peu arbitraires, de masse virtuelle et de masse fictive ? Il nous a semblé beaucoup plus simple et plus naturel de chercher à exprimer directement les périodes de résonance de la poutre flottante, en fonction des paramètres mesurables qui la définissent.

Pour réaliser cette étude expérimentale, nous avons comparé les vibrations d'une même poutre suivant un même mode, d'une part quand elle est libre (ce qu'on réalise en la faisant reposer sur deux appuis placés à des noeuds) et d'autre part quand elle flotte.

Nous avons d'abord comparé ainsi les amortissements dans l'un et l'autre cas.

Puis, nous avons entrepris des essais systématiques au cours desquels nous faisons varier l'un des paramètres pouvant avoir une influence. Or, la différence entre les périodes de résonance correspondantes est due à l'action de contact du liquide sur la poutre quand celle-ci flotte. Elle dépend donc essentiellement de la surface de contact entre la poutre et le liquide, c'est-à-dire des dimensions de celle-ci : longueur, largeur et hauteur immergée de la poutre.

Nous avons donc entrepris trois séries d'essais systématiques au cours desquels nous avons fait varier successivement, chacune de ces dimensions séparément.

2. MATERIEL. METHODE EXPERIMENTALE

21. MATERIEL EXPERIMENTAL

L'expérimentation a été réalisée dans les laboratoires de l'E.N. S.M.

Le plan d'eau est celui du petit bassin du laboratoire de mécanique des fluides d'une longueur de 5 mètres (largeur 1,84 m).

Les poutres sont des planches en différents bois (souvent acajou ou sapin), vernies afin d'obtenir un bon état de surface et pour éviter l'absorption d'eau au cours des mesures. Leurs dimensions sont variables de 0,5 m à 4 m pour la longueur, de 2 cm à 80 cm pour la largeur, de 5 mm à 50 mm pour l'épaisseur.

Nous avons aussi utilisé une poutre métallique creuse que nous avons chargée de sable réparti sur toute sa longueur (longueur 2 m, largeur 20 cm, hauteur 4 cm, épaisseur 1 mm).

22. OBTENTION DES VIBRATIONS

Les poutres, reposant sur deux appuis ou flottant à la surface de l'eau, sont mise en vibration au moyen d'un générateur C.R.C. G.B. 64 et d'un amplificateur Philips 129 043 alimentant deux excitateurs (fabrication E.N.S.M.) dont les bobines sont fixées chacune à une extrémité de la poutre.

L'expérience a montré que deux excitateurs suffisent pour obtenir nettement non seulement le mode fondamental en flexion, mais aussi un certain nombre d'harmoniques. Dans le cas de certaines planches très flexibles nous avons pu obtenir facilement tous les harmoniques jusqu'au mode de vibration comportant 16 noeuds. Pour cela il suffit d'alimenter les excitateurs en série pour les modes comportant un nombre pair de noeuds et en opposition pour les modes comportant un nombre impair de noeuds. Dans les essais où les poutres flottent à la surface de l'eau ce sont les excitateurs eux-mêmes qui assurent le positionnement des planches par autocentrage des bobines dans les entrefers des pots d'excitation fixés à une poutre fixe recouvrant le bassin.

Pour les planches les plus étroites (et les plus légères) il a toutefois été utile d'assurer un guidage supplémentaire. On a utilisé quatre excitateurs (placés dans les angles) pour les planches les plus larges. On a aussi effectué quelques essais avec un troisième excitateur placé au milieu (pour un nombre pair de noeuds), mais son influence s'est montrée négligeable.

On peut remarquer que les bobines des excitateurs fixées sur la poutre modifient un peu la masse de la structure vibrante (50 grammes par excitateur pour des poutres dont la masse est généralement supérieure au kilogramme et atteint jusqu'à 50 kg dans certains cas). De toutes façons, le dispositif ne modifie en rien la rigidité de la poutre.

23. MESURES

Les fréquences de résonance sont dans tous les cas que nous avons étudiées comprises entre 3 Hz et 400 Hz. Nous avons préféré indiquer toujours les périodes car ce sont elles que nous avons mesurées avec un périodemètre Rochar A 1211.

Dans les tableaux de résultats ces périodes sont données à 1°/oo près.

Les déplacements ont été détectés au moyen d'un capteur Prodera 20 M 12/A et d'un millivoltmètre Philips GM 6 117.

L'immersion des poutres et leur masse volumique ont été déduites de leur masse et de leurs dimensions (pour des poutres en sapin ρ est de l'ordre de 500 à 560 kg/m³, et pour les poutres en acajou il est de l'ordre de 780 à 910 kg/m³, donc très variable).

Le module d'élasticité longitudinale a quelquefois été mesuré par des essais statiques, mais en général sa valeur a été déduite de la période fondamentale de résonance dans l'air.

Enfin, pour les vibrations dans l'air, la position des noeuds, où

devaient être placés les appuis, a été prédéterminée par le calcul comme il a été indiqué. Nous avons toutefois effectué quelques vérifications en déplaçant les appuis de part et d'autre de la position théorique et nous avons chaque fois noté la période de résonance et l'amplitude correspondante. Le maximum d'amplitude et le minimum pour la période, qui peuvent être considérés comme critères de la résonance ont toujours été observés pour des points très proches du point théorique et légèrement plus près du centre de la poutre. A titre d'exemple, l'écart est de 6 mm pour une poutre de 2 m et l'écart pour la période est toujours inférieur à 0,5 %. Ce léger écart est dû au fait que les conditions aux limites envisagées pour la poutre libre ne sont pas parfaitement réalisées puisque les excitateurs exercent un effort à chaque extrémité.

3. INFLUENCE DE L'EAU SUR L'AMORTISSEMENT

=====

31. ESSAIS EFFECTUES

Avant d'entreprendre des essais systématiques sur les périodes de résonance comparées dans l'air et dans l'eau, nous avons voulu préciser si l'eau avait une influence notable sur l'amortissement. Pour cela, nous avons effectué plusieurs séries d'essais sur des planches diverses au voisinage des périodes de résonance (mode fondamental et premiers harmoniques). Dans chaque cas nous avons construit la courbe de résonance, c'est à dire exprimé l'amplitude du déplacement (mesuré à une extrémité de la poutre) en fonction de la période.

Sur ces courbes nous avons, dans les différents cas, mesuré l'acuité de la résonance

$$a = \frac{T_2 - T_1}{2 T_0}$$

où T_0 est la période de résonance considérée

T_1 et T_2 sont les périodes voisines pour lesquelles l'amplitude est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$.

On sait en effet que si l'amortissement est du type visqueux, le coefficient d'amortissement ε est égal à a .

32. COURBES DE RESONANCE

Des différents essais effectués, nous retenons ici, à titre d'illustration celui portant sur une planche en acajou dont les caractéristiques sont les suivantes :

- dimensions : longueur = L 2,1 m - Largeur B = 0,2 - Hauteur H = 28 mm
- Masse M = 8,85 kg, masse spécifique $\rho = 753 \text{ kg/m}^3$
- module d'élasticité longitudinale $E = 0,945 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$

Nous donnons, les courbes de résonance, d'une part dans l'air (poutre libre), et d'autre part lorsque la poutre flotte à la surface de l'eau, pour chacun des trois premiers modes de vibration en flexion plane verticale. Bien entendu nous avons modifié les échelles relatives aux

différentes figures car les amplitudes observées sont très différentes suivant les cas ; de plus, s'il est possible d'exercer un même effort quand on étudie successivement les différents modes avec un même montage, on n'est pas assuré de retrouver les mêmes conditions quand on change de montage, en passant par exemple de l'air à l'eau. Les valeurs absolues des déplacements ne sont donc pas à considérer ici.

33. CONCLUSION

Les différentes courbes de résonance sont du type "amortissement visqueux", aussi bien pour les vibrations de la poutre libre que pour les vibrations de la poutre flottante.

Les coefficients d'amortissement sont toujours du même ordre de grandeur, aussi bien pour la poutre flottante que pour la poutre libre, et pour les différents modes successifs considérés.

n	Coefficient d'amortissement $\epsilon \times 10^3$	
	Air	Eau
2	8,1 + 0,5	7,9 + 0,6
3	7,9 + 0,7	8,6 + 0,7
4	7,5 + 0,7	8,0 + 0,7

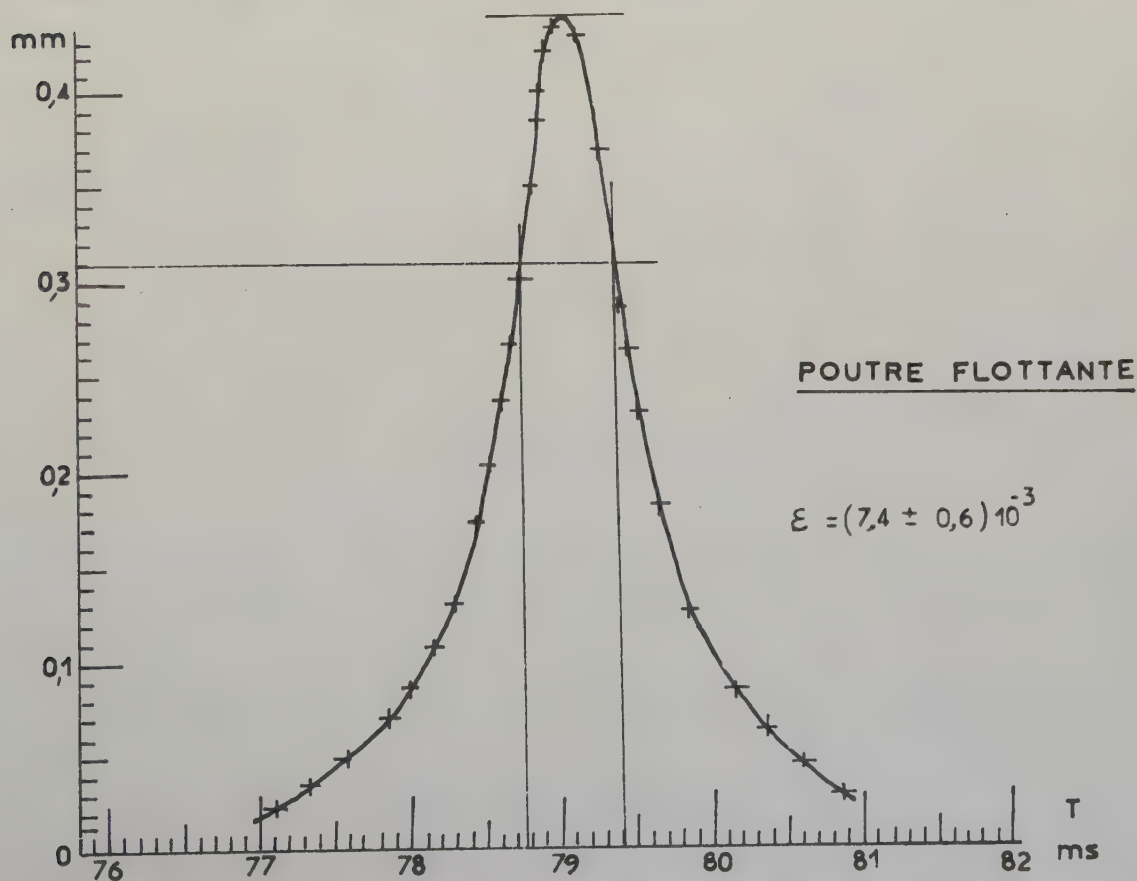
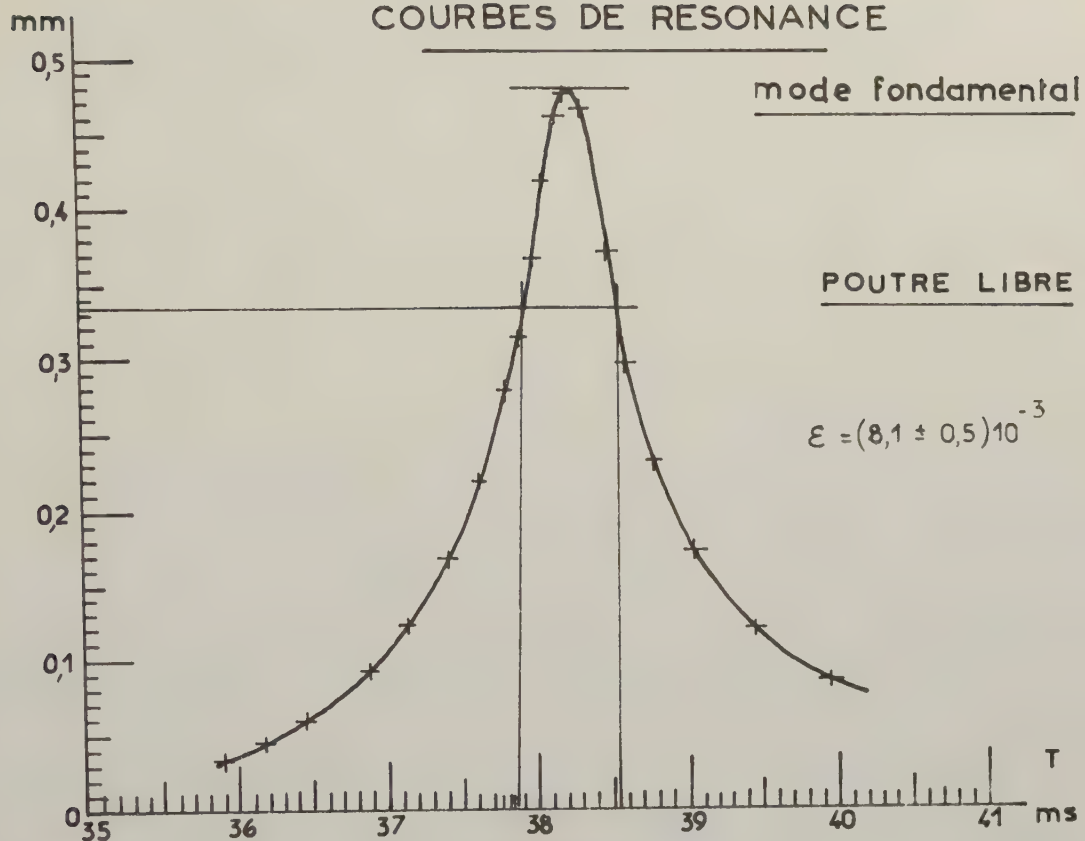
Il semble donc que l'influence de l'eau entourant la poutre soit négligeable en ce qui concerne l'amortissement.

Cette observation est importante : elle confirme la théorie de la masse virtuelle.

Les périodes de vibration de la poutre flottante sont considérablement plus grandes que celles de la poutre libre, mais cette augmentation ne peut pas s'expliquer par une augmentation de l'amortissement.

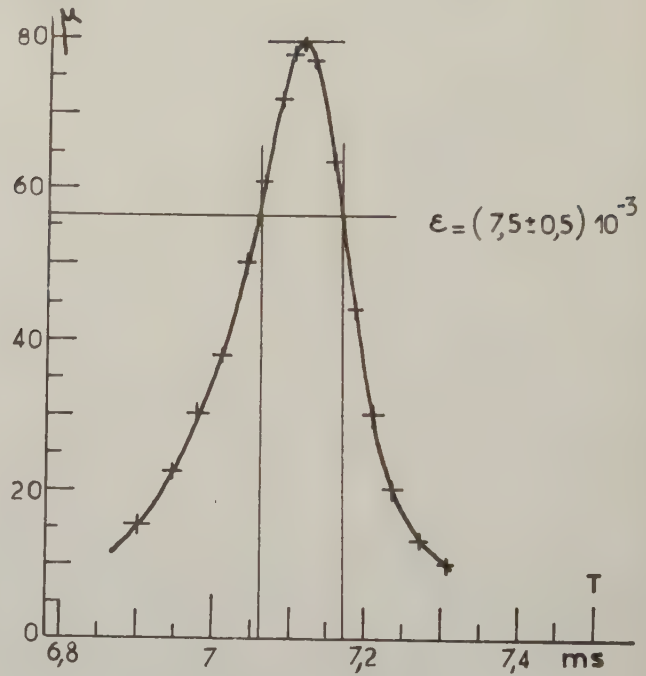
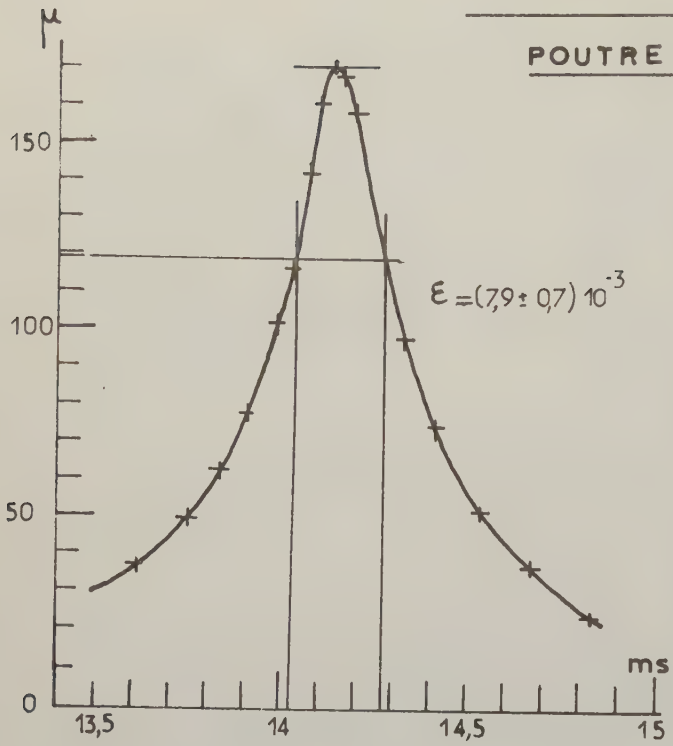
Il reste, bien sûr, à calculer ou à mesurer la masse virtuelle, ou ce qui revient au même à rechercher le rapport des périodes de vibration correspondantes qui lui est lié, ce que nous avons fait en entreprenant des séries d'essais systématiques.

COURBES DE RESONANCE

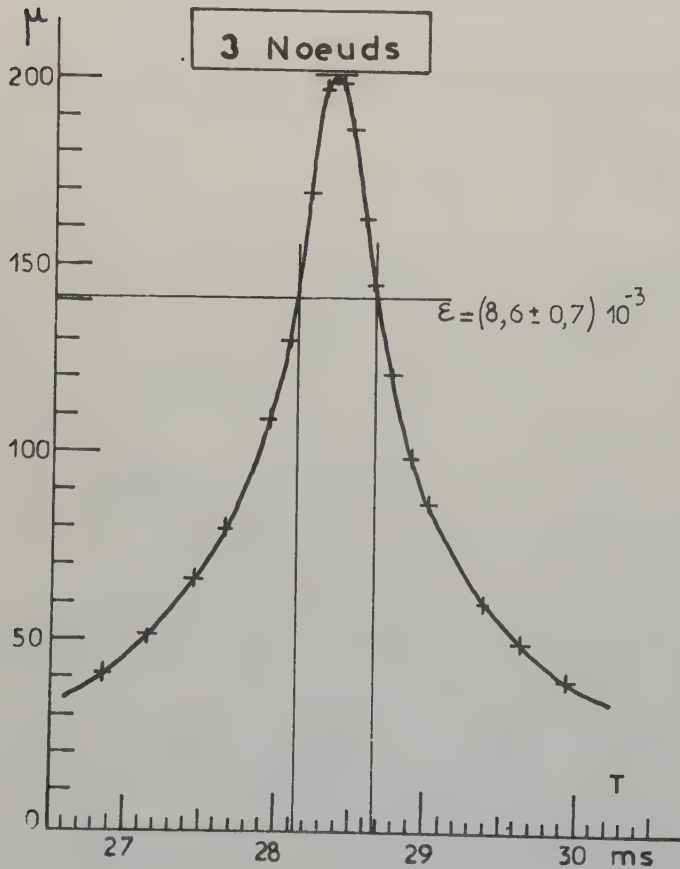


COURBES DE RESONANCE

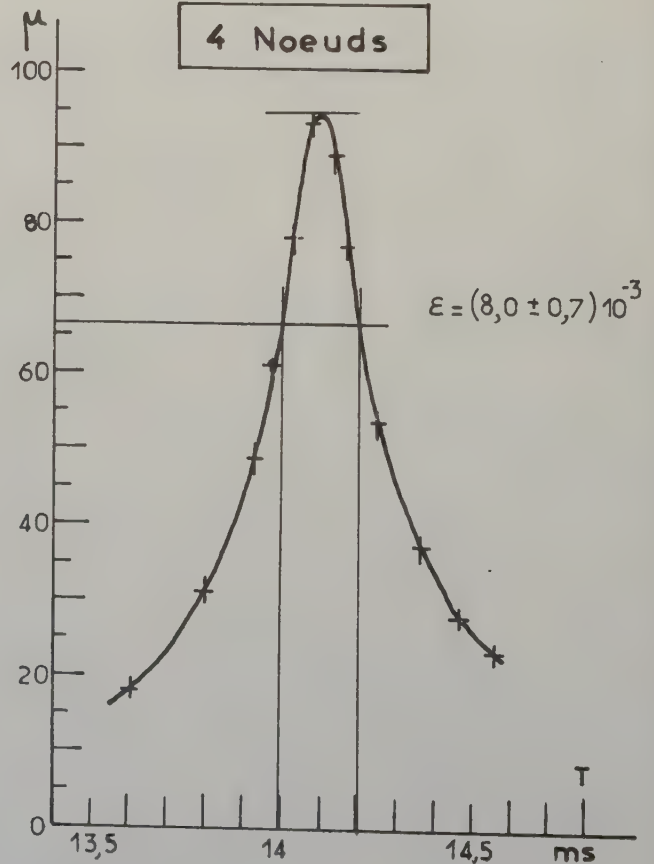
POUTRE LIBRE



3 Noeuds



4 Noeuds



POUTRE FLOTTANTE

4. ESSAIS SYSTEMATIQUES EN FONCTION DES DIMENSIONS DES POUTRES

=====

41. LES ESSAIS

Les essais systématiques que nous avons effectués ont porté sur trois planches en sapin vernies dont les dimensions initiales étaient (en millimètres) : 4 000 x 200 x 20, 2000 x 800 x 20 et 2 000 x 200 x 60. Pour la première planche nous avons progressivement diminué la longueur de 4 m jusqu'à 0,5 m. Pour la deuxième planche nous avons progressivement diminué la largeur de 80 cm jusqu'à 2 cm. Enfin, pour la dernière planche nous avons progressivement diminué l'épaisseur de 60 mm jusqu'à 5 mm.

Pour chaque dimension intermédiaire, nous avons fait vibrer chaque planche en flexion plane verticale, d'une part librement dans l'air, et d'autre part en la faisant flotter à la surface de l'eau, afin de comparer les périodes de résonance correspondantes.

42. VIBRATIONS DANS L'AIR (POUTRE LIBRE)

Nous n'avons, en général, au cours de cette série d'essais, effectué que la mesure de la période fondamentale. Nous en avons ensuite déduit par le calcul les autres périodes pour les harmoniques successifs. Pour le mode fondamental la mesure directe était préférable au calcul pour différentes raisons :

- les poutres sont en bois et elles ne sont donc pas homogènes
- la connaissance de la masse volumique et du module d'élasticité longitudinale est malaisée, et de toute façon il ne peut s'agir que de valeurs moyennes qui ne restent même pas constantes d'un essai à l'autre quand on modifie les dimensions des planches.
- les excitateurs placés aux extrémités des planches, s'ils n'en modifient pas la raideur, constituent des surcharges (30 g chacun), qui pour certaines planches deviennent non négligeables, et les efforts qu'ils exercent pour obtenir le mouvement vibratoire modifient légèrement les conditions aux limites.

- les planches, malgré le vernis qui les recouvre, absorbent un peu d'eau lors de chaque immersion, ce qui modifie légèrement leurs caractéristiques mécaniques au cours des essais successifs

- l'état hygrométrique des planches varie dans le temps avec celui de l'air ambiant.

Les résultats des mesures effectuées dans l'air sont donnés avec ceux des vibrations à la surface de l'eau, sous forme de tableaux.

Pour les raisons indiquées ci-dessus, les valeurs obtenues ne sont pas exactement celles que l'on pouvait attendre.

Outre les écarts aléatoires imputables à l'expérimentation, on peut noter que les périodes de résonance deviennent légèrement supérieures à celles prévues par extrapolation des premiers résultats. Ceci peut être expliqué par les différentes raisons suivantes :

- Pour les planches les plus courtes l'effet de cisaillement devient relativement plus important.

- Pour les planches les plus légères, les surcharges constituées par les excitateurs deviennent relativement plus notables.

- au cours des dernières mesures effectuées (portant donc sur les planches les plus réduites), l'eau absorbée lors des immersions précédentes a alourdi les planches.

43. VIBRATIONS A LA SURFACE DE L'EAU -

Au cours des essais effectués lorsque les planches flottaient à la surface de l'eau, nous avons cherché à obtenir, non plus seulement le mode fondamental en flexion plane verticale, mais aussi autant d'harmoniques de ce mode qu'il est possible d'en distinguer.

Ainsi qu'il a été indiqué plus haut, nous n'avons employé que deux excitateurs placés chacun à une extrémité de la poutre et alimentés soit en série, soit en opposition selon la parité du nombre de noeuds de la déformée dans le mode de vibration considéré. Pour les planches les plus longues et pour les planches les plus minces (c'est à dire les planches les plus flexibles), nous avons pu obtenir facilement tous les modes successifs jusqu'à 16 noeuds compris.

5. RESULTATS DES ESSAIS SYSTEMATIQUES

=====

Nous donnons ici les résultats des mesures qui ont été effectuées d'une part dans l'air et d'autre part à la surface de l'eau. Nous les donnons sous forme de tableaux relatifs respectivement aux variations successives de la longueur, de la largeur et de la hauteur de la poutre vibrante.

Nous avons aussi porté ces résultats sur des graphiques établis en coordonnées logarithmiques, graphiques que nous donnons également ici. Sur chacun d'eux, nous avons porté les périodes de résonance des différents modes successifs en fonction de la dimension considérée.

Les variations des périodes de résonance des poutres flottantes considérées, telles qu'elles apparaissent sur ces différents graphiques, appellent dans chacun des cas étudiés un certain nombre de remarques très nettes.

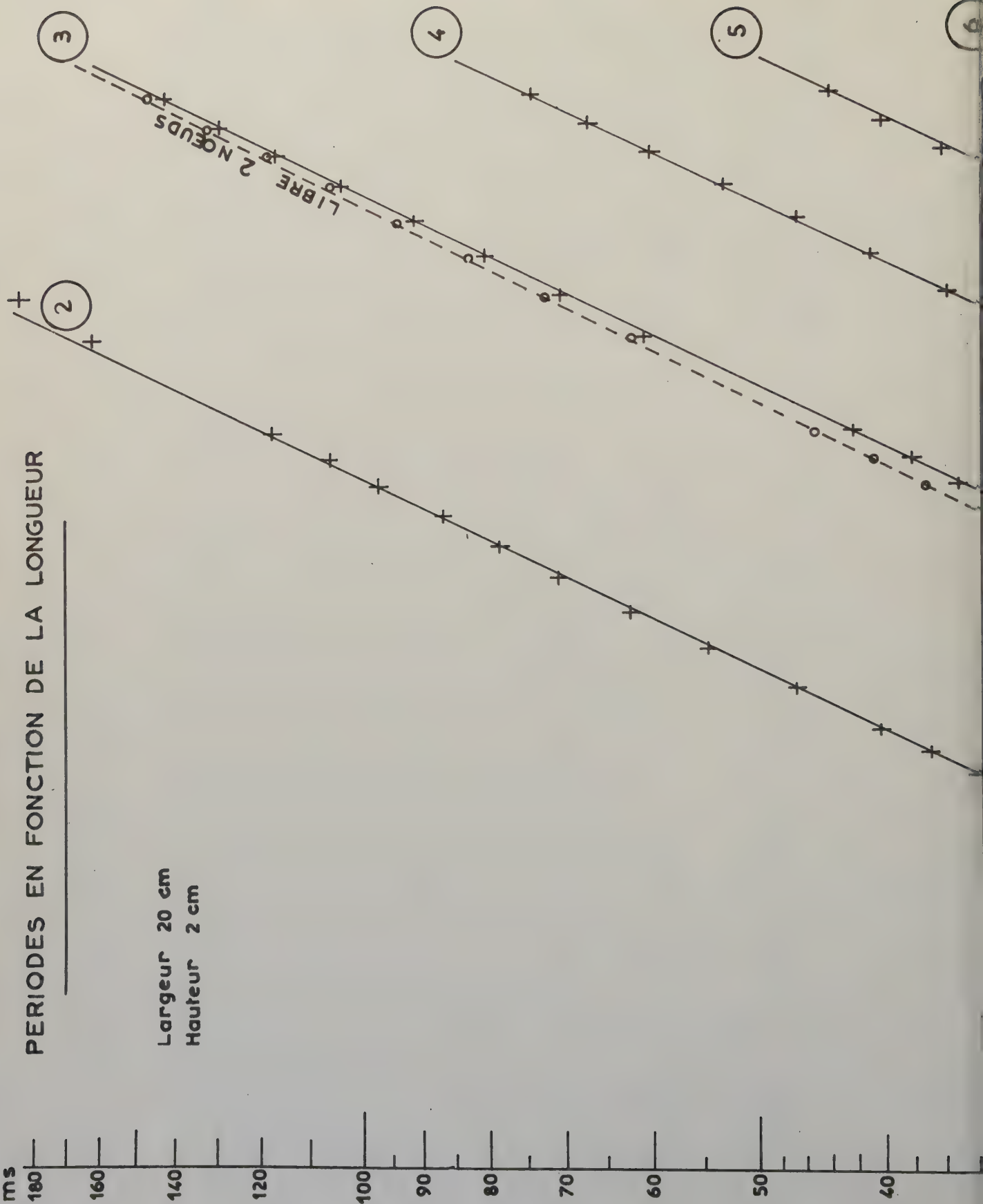
Voici ces différents résultats sous les formes indiquées, et les remarques qu'ils permettent de faire.

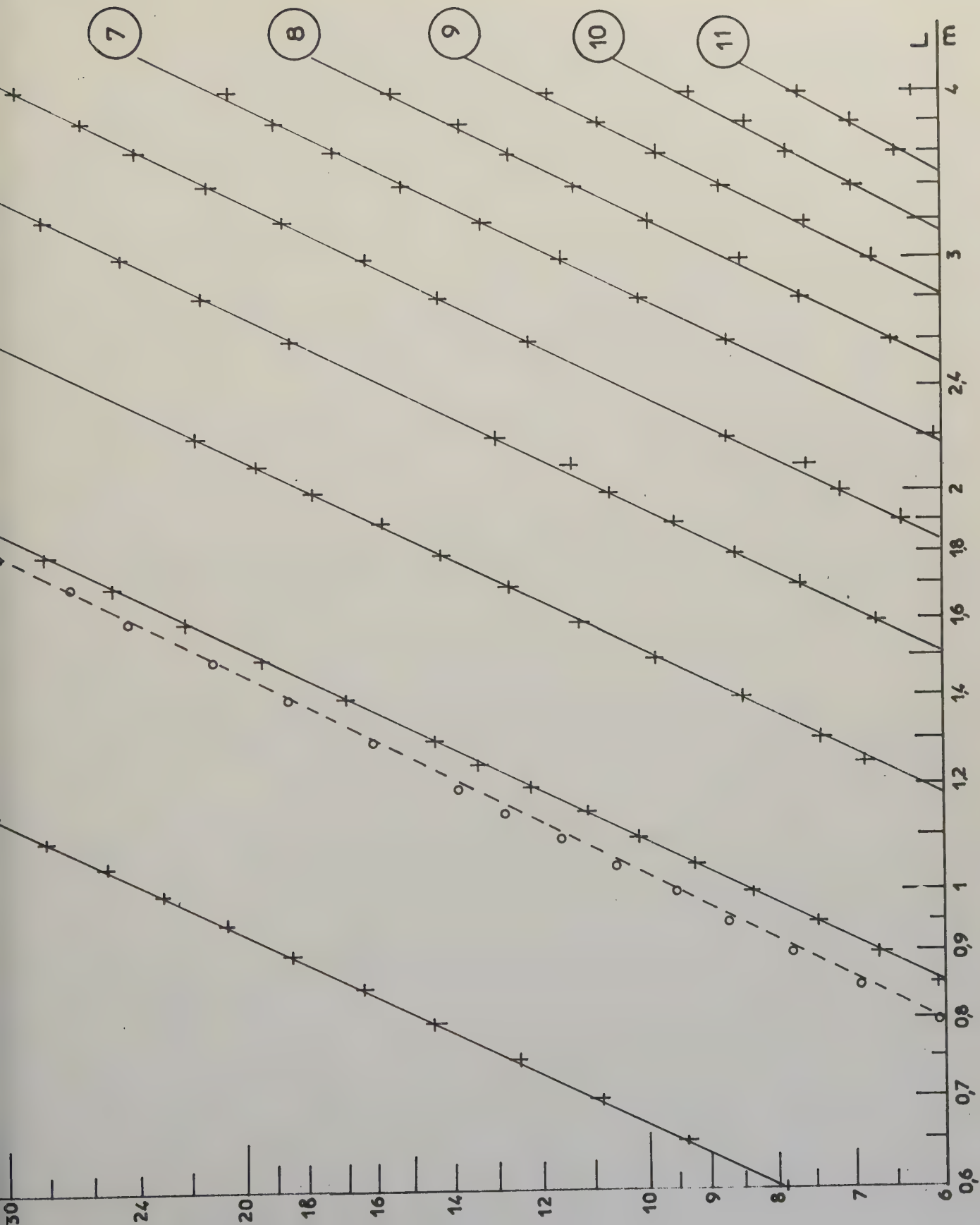
1 BIS - PERIODES EN FONCTION DE LA LONGUEUR (SUITE)

L m	1,20	1,15	1,10	1,05	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50
m kg	2,670	2,560	2,460	2,360	2,250	2,140	2,020	1,915	1,810	1,705	1,600	1,445	1,375	1,270	1,165
h mm	11,12	11,13	11,19	11,24	11,25	11,27	11,23	11,26	11,31	11,37	11,43	11,13	11,47	11,54	11,65
T_a ms	13,95	12,96	11,68	10,59	9,61	8,75	7,81	6,95	6,04	5,40	4,64	4,08	3,49	2,94	2,49
T_2 ms	34,24	31,11	28,47	25,88	23,20	20,89	18,55	16,47	14,55	12,48	10,87	9,39	7,91	6,55	5,48
T_3	12,31	11,17	10,23	9,26	8,34	7,44	6,72	6,03	5,25	4,57	3,93	3,58	2,73	2,63	2,78
T_4	6,21	5,81	5,18	4,73	4,28	3,79	3,34	3,19	2,54	2,39	2,20	2,12			
T_5	3,83	3,45	3,16	2,85	2,62	2,23									

PERIODES EN FONCTION DE LA LONGUEUR

Largeur 20 cm
Hauteur 2 cm





51. PERIODES DE RESONANCE EN FONCTION DE LA LONGUEUR

Sur le graphique en coordonnées logarithmiques où les périodes de résonance ont été exprimées en fonction de la longueur de la poutre on constate :

a) Les points figuratifs pour un même mode de résonance sont très sensiblement alignés sur une droite lorsque la longueur varie.

Il convient cependant de remarquer que pour le mode fondamental la courbe représentative s'infléchit très nettement pour des longueurs supérieures à 3 mètres.

b) Les droites figuratives de chacun des modes de résonance sont très sensiblement parallèles.

c) La pente de ces droites est égale à 2,075

d) Les rapports de la période fondamentale aux périodes successives sont respectivement : 2,76 - 5,46 - 9,07 - 13,4 - 19,1 - 25,2 - 32,5 ...

Soit sensiblement les mêmes que pour la poutre libre.

Ainsi, les variations des périodes de résonance en fonction de la longueur sont sensiblement les mêmes pour la poutre libre et pour la poutre flottant à la surface de l'eau.

La croissance de la période avec la longueur est toutefois légèrement supérieure pour la poutre flottante. Elle est de la forme $T = k L^{2,075}$ au lieu de $T = K L^2$ pour la poutre libre.

Le rapport des périodes correspondantes pour un même mode de vibration de la poutre libre et de la poutre flottante croît très légèrement avec la longueur de la poutre.

2 - PERIODES EN FONCTION DE LA LARGEUR

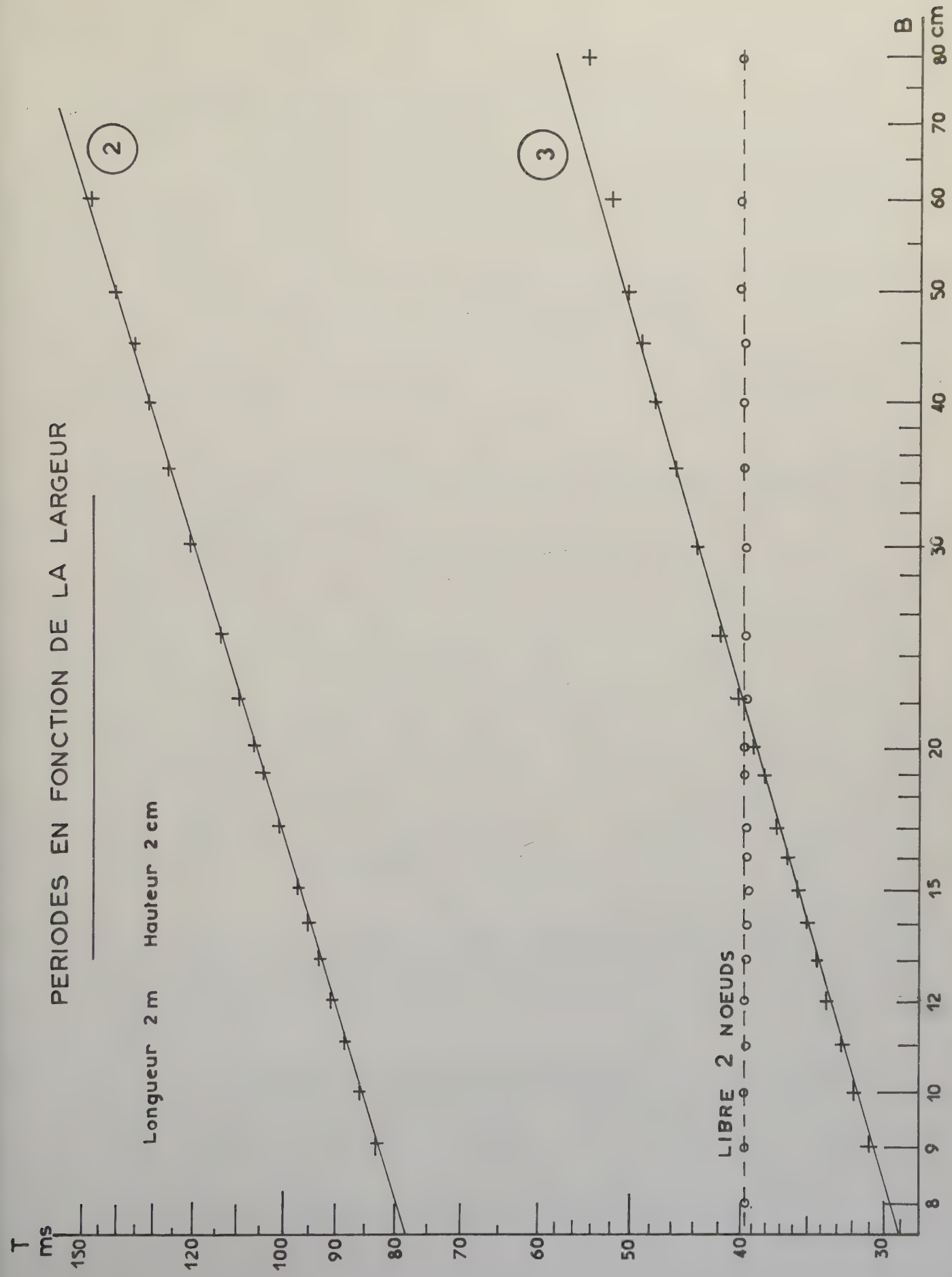
	80	60	50	45	40	35	30	25	22	20	19	17	15	14	13	12	11	10	9	8
b_{cm}																				
m	13,960	10,460	8,670	7,750	6,960	6,130	5,270	4,350	3,845	3,500	3,305	2,930	2,595	2,425	2,260	2,100	1,945	1,775	1,615	1,450
h	8,72	8,72	8,67	8,61	8,70	8,77	8,79	8,70	8,75	8,75	8,71	8,63	8,66	8,67	8,69	8,74	8,83	8,88	8,97	9,07
T_a	40,1	40,2	40,0	39,9	39,7	39,7	39,6	39,5	39,5	39,6	39,6	39,5	39,4	39,5	39,6	39,7	39,6	39,6	39,7	39,8
T_2	151,9	145,3	139,4	132,4	130,9	126,0	121,2	113,1	109,6	106,4	104,2	101,1	96,5	94,8	93,5	91,4	88,8	85,8	82,9	80,6
T_3	53,4	50,7	49,4	47,09	46,79	45,00	44,11	41,34	40,04	38,98	37,64	37,25	35,28	34,76	34,24	33,63	32,64	31,72	30,69	29,65
T_4	25,8	24,9	23,96	21,94	22,97	21,40	22,09	20,65	20,07	16,66	19,19	18,84	17,74	17,84	17,44	17,09	16,69	16,16	15,69	15,16
T_5	14,51	14,41	13,85	13,09	13,78	12,78	12,81	12,30	11,93	11,71	11,39	11,28	10,64	10,51	10,47	10,26	9,96	9,71	9,25	8,99
T_6	9,36	9,30	9,25	9,51	8,62	7,98	8,60	8,13	7,88	7,71	7,59	7,51	7,18	7,11	7,02	6,91	6,70	6,53	6,33	6,10
T_7	6,61	6,60	6,60	7,02	6,13	5,61	6,64	5,87	5,57	5,50	5,64	5,43	5,31	5,20	5,06	4,94	4,78	4,69	4,55	4,41
T_8		4,36	5,92	5,21	4,82	4,22	4,64	4,30	4,08	4,09	4,04	4,01	3,81	3,81	3,90	3,75	3,59	3,62	3,46	3,33
T_9			3,63	3,34	3,22	3,41	3,39	3,05	3,20	3,18	3,36	3,28	3,14	3,11	3,08	2,96	2,80	2,81	2,76	2,65

2 BIS - PERIODES EN FONCTION DE LA LARGEUR (SUITE)

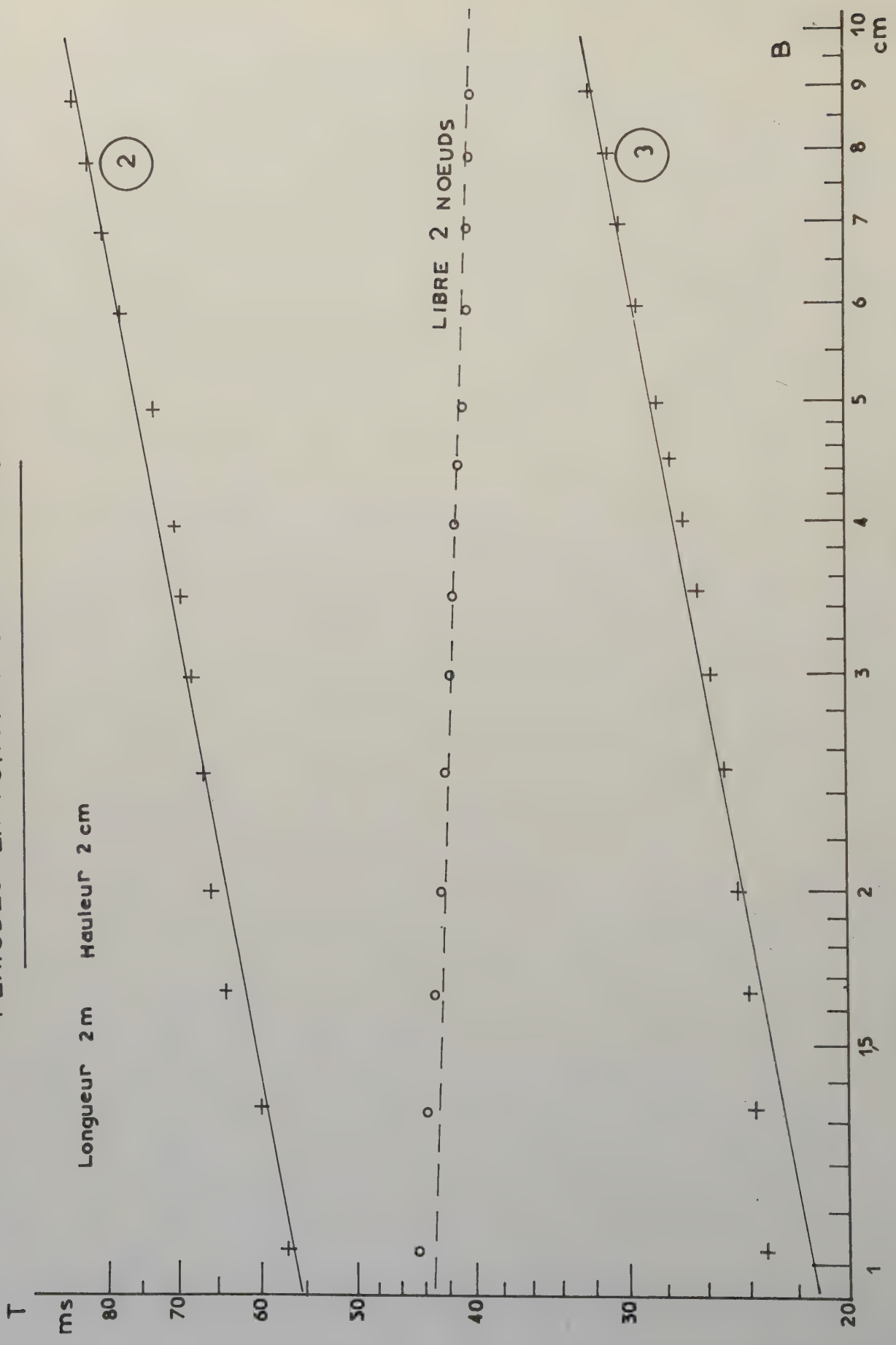
b	cm	9	8	7	6	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,65	1,33	1,02
m	kg	1,650	1,470	1,300	1,115	0,940	0,860	0,775	0,690	0,605	0,505	0,415	0,350	0,303	0,245
h	mm	9,17	9,19	9,28	9,30	9,40	9,56	9,69	9,86	10,09	10,10	10,40	10,63	11,40	12,03
T _a	ms	39,8	40,0	40,2	40,4	40,6	40,9	41,1	41,5	41,9	42,4	43,1	43,9	44,5	46,0
T ₂	ms	84,3	82,5	80,6	77,7	73,6	72,4	70,9	69,5	68,1	66,8	66,1	64,7	59,3	56,4
T ₃		31,9	30,70	30,25	29,11	27,79	27,31	26,57	25,65	25,53	25,14	24,58	24,00	23,55	23,34
T ₄		16,13	15,74	15,48	14,84	14,12	14,00	13,54	13,31	13,00	12,78	12,47	12,03	11,97	11,44
T ₅		10,16	9,82	9,66	9,26	8,77	8,66	8,43	7,76	7,56	7,52	7,24	6,95	6,84	6,67
T ₆		6,67	6,48	6,25	6,00	5,79	5,66	5,49	5,35	5,22	5,08	4,88	4,72	4,50	4,46
T ₇		4,96	4,87	4,53	4,37	4,22	4,10	3,98	3,88	3,78	3,68	3,37	3,31	3,28	3,10
T ₈		3,92	3,74	3,39	3,25	3,18	3,05	2,98	2,88	2,78	2,74	2,65	2,55	2,45	
T ₉		3,14	3,30	2,95	2,52	2,44	2,35	2,27	2,25	2,15	1,99				

PERIODES EN FONCTION DE LA LARGEUR

Longueur 2 m Hauteur 2 cm



PERIODES EN FONCTION DE LA LARGEUR



52. PERIODES DE RESONANCE EN FONCTION DE LA LARGEUR

Sur le graphique en coordonnées logarithmiques où les périodes de résonance ont été exprimées en fonction de la largeur de la poutre on constate :

- a) Les points figuratifs pour un même mode de résonance sont très sensiblement alignés sur une droite lorsque la largeur varie.
- b) Les droites figuratives de chacun des modes de résonance sont très sensiblement parallèles.
- c) La pente de ces droites est égale à 0,32
- d) Les rapports de la période fondamentale aux périodes successives sont respectivement : 2,74 5,82 ...

soit sensiblement les mêmes que pour la poutre libre.

e) Pour des largeurs devenant très petites, les courbes représentatives s'écartent nettement des droites envisagées ci-dessus, par valeurs supérieures et en gardant entre elles des distances constantes.

Il semble que l'on tende alors asymptotiquement vers les mêmes valeurs que pour les périodes de la poutre libre quand la largeur tend vers zéro. Mais les mesures deviennent plus incertaines car les poutres devenant plus légères (et les surcharges devenant relativement plus importantes), elles sont moins stables à la surface de l'eau, et il devient nécessaire de les guider pour que le mouvement reste vertical.

Ainsi, pour des largeurs B suffisantes, les périodes de résonance de la poutre flottante sont proportionnelles à $B^{0,32}$, soit très sensiblement $B^{1/3}$ alors qu'elles sont indépendantes de la largeur pour la poutre libre.

Le rapport des périodes correspondantes pour un même mode de vibration de la poutre flottante et de la poutre libre est proportionnel à $B^{1/3}$ quand la largeur est suffisante, mais tend vers l'unité quand la largeur tend vers zéro.

53. PERIODES DE RESONANCE EN FONCTION DE L'EPAISSEUR

Sur le graphique en coordonnées logarithmiques où les périodes de résonance ont été exprimées en fonction de la hauteur de la poutre on constate :

a) les points figuratifs pour un même mode de résonance sont très sensiblement alignés sur une droite lorsque la hauteur varie.

b) les droites figuratives pour chacun des modes de résonance sont très sensiblement parallèles.

c) la pente de ces droites est égale à 1,29.

d) les rapports de la période fondamentale aux périodes successives sont respectivement 2,73 - 5,28 - 8,61 - 13,2 - 18,2 - 25,4...

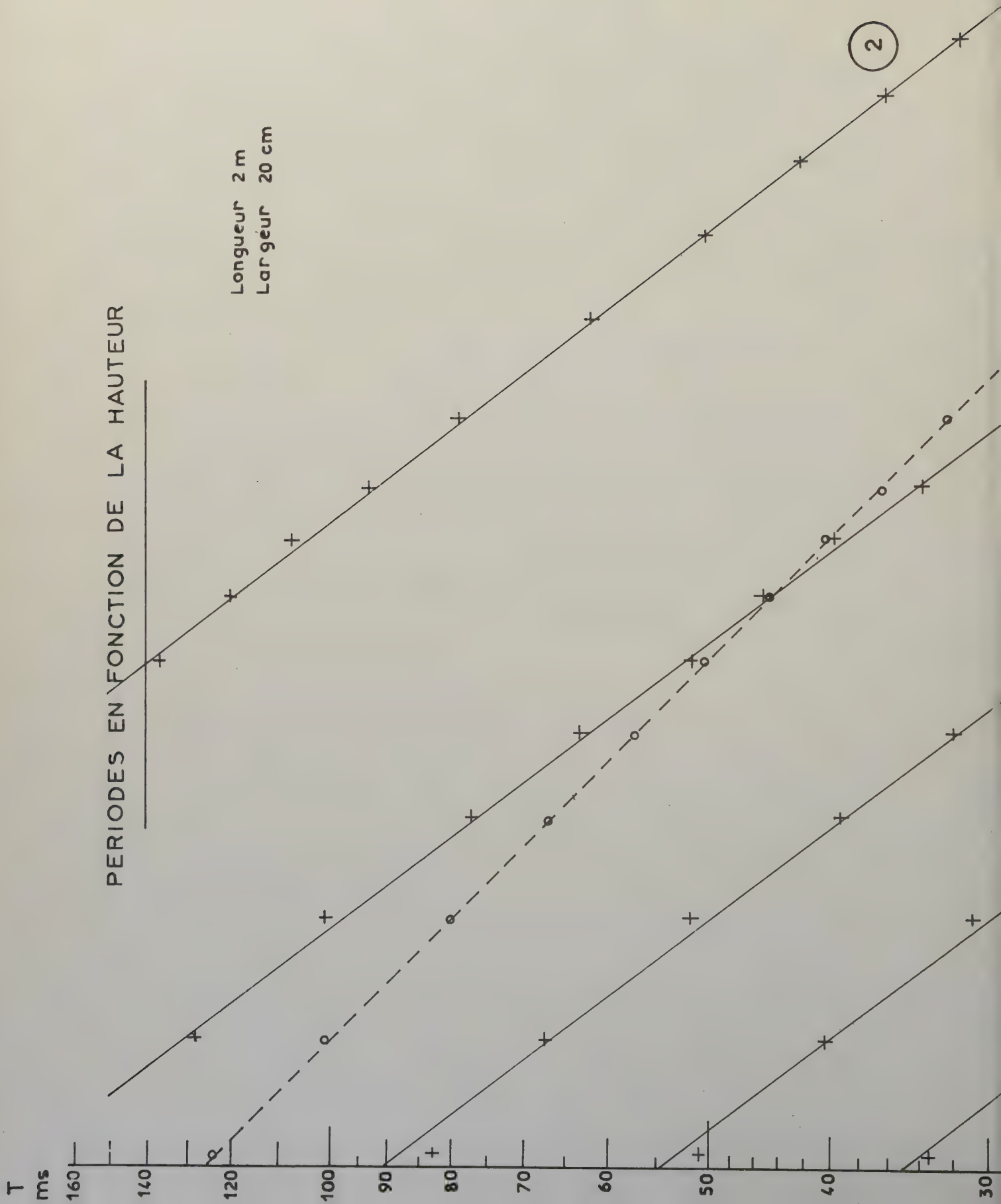
soit sensiblement les mêmes que pour la poutre libre.

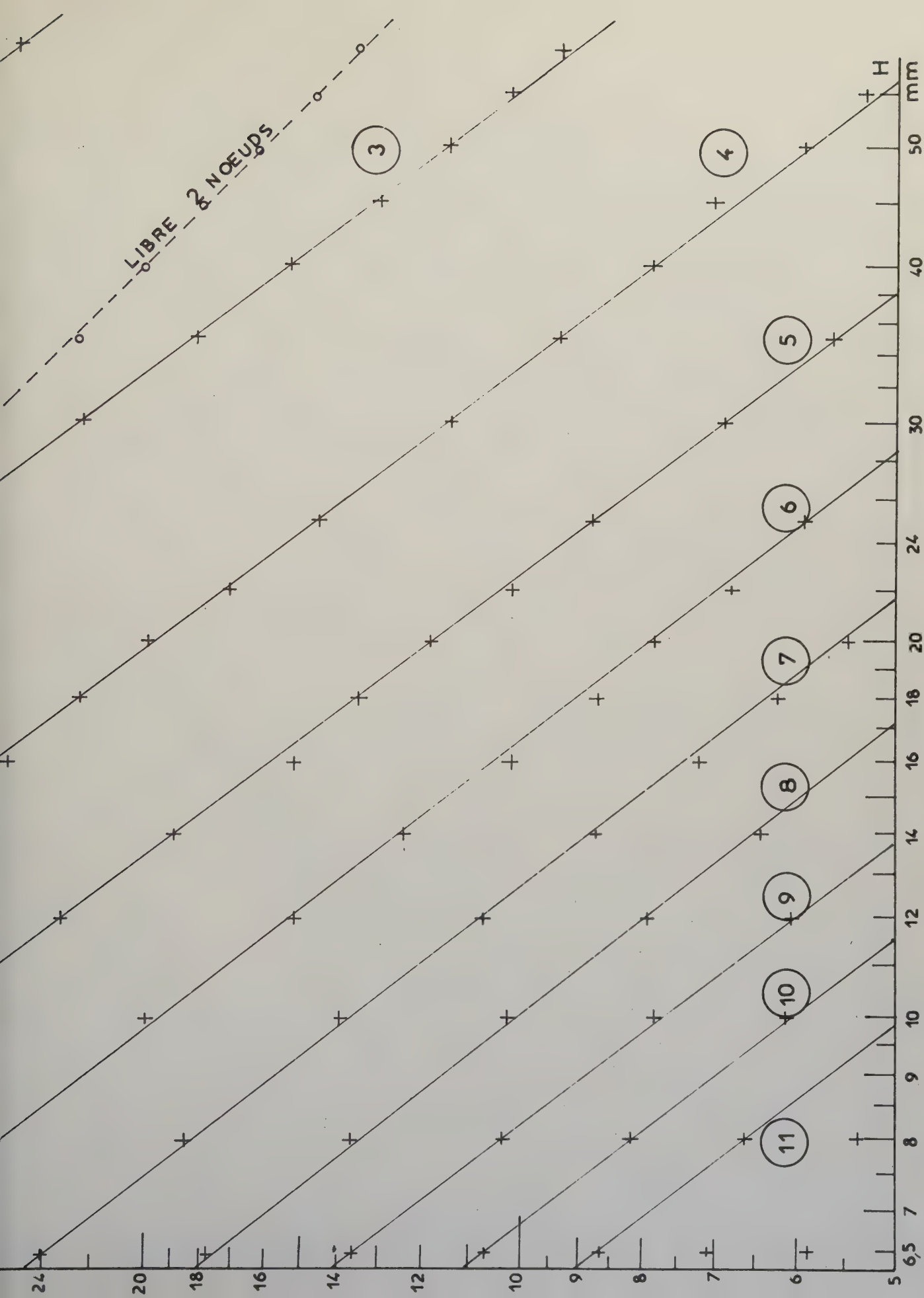
e) Pour des hauteurs très faibles les courbes représentatives s'écartent nettement des droites envisagées ci-dessus, au dessous de celles-ci.

PERIODES EN FONCTION DE LA HAUTEUR

Longueur 2 m
Largeur 20 cm

2

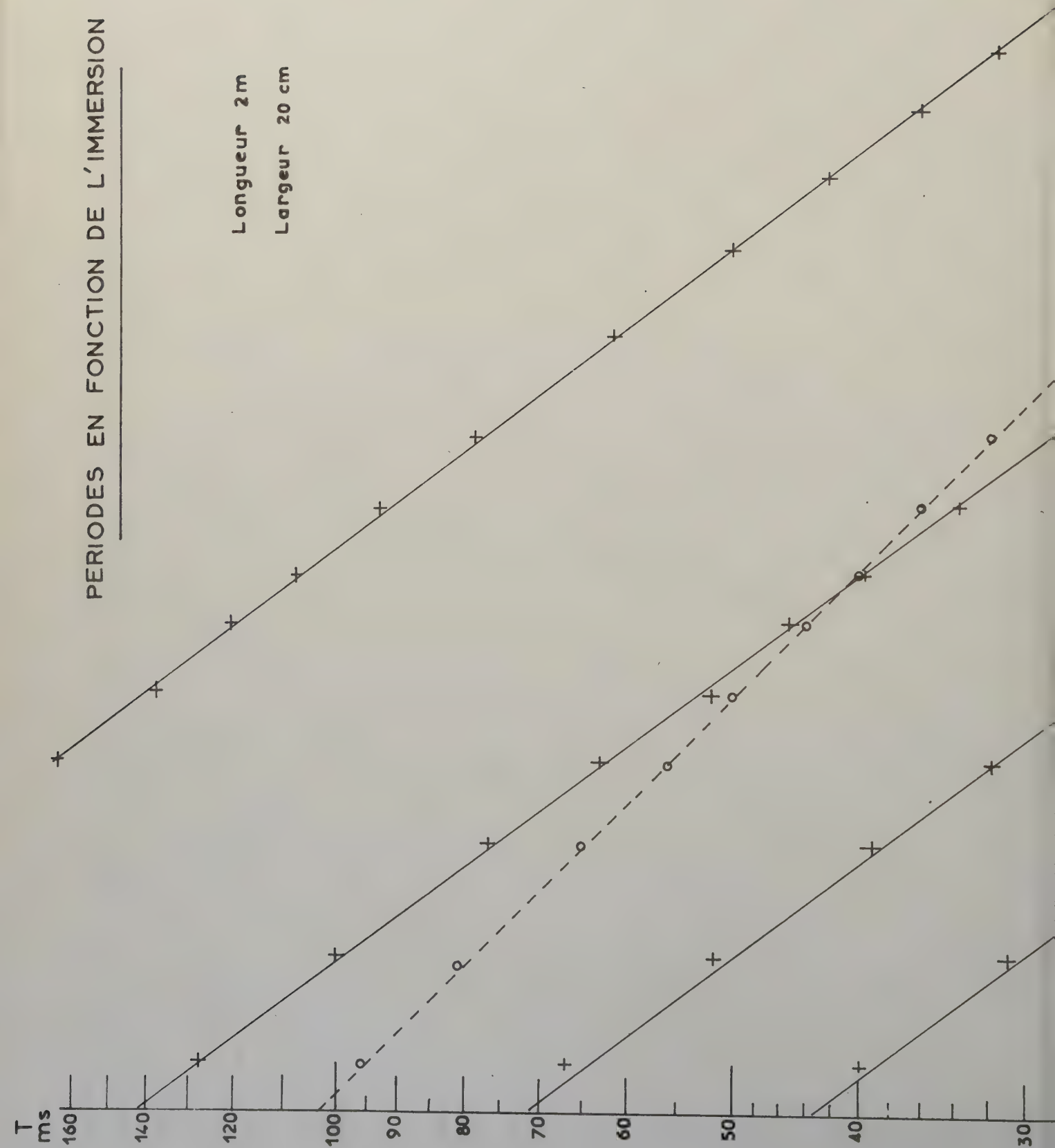


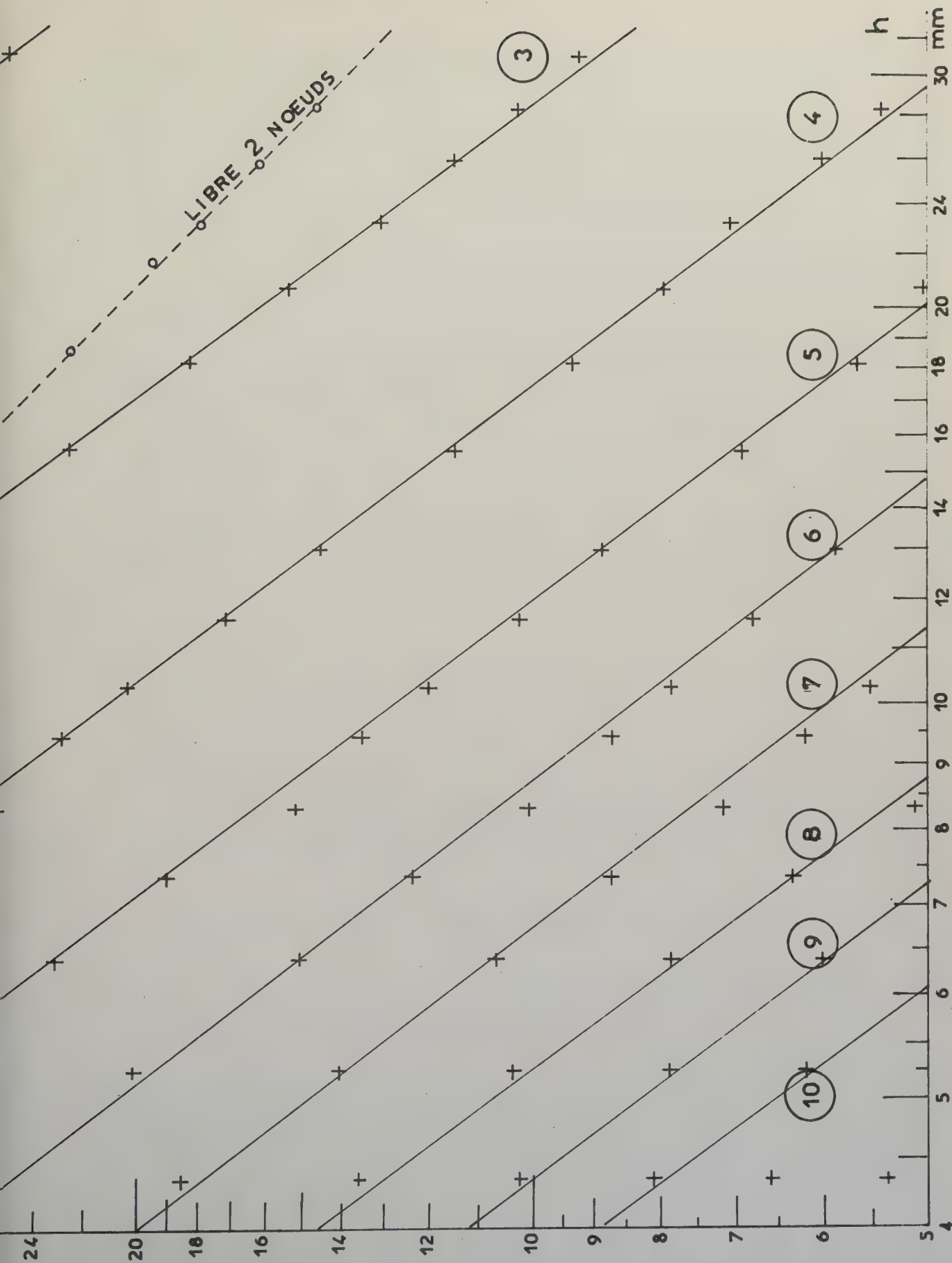


PERIODES EN FONCTION DE L'IMMERSION

Longueur 2m

Largeur 20 cm





54. PERIODES DE RESONANCE EN FONCTION DE LA HAUTEUR IMMERGEE

Il nous a semblé préférable de considérer les hauteurs immergées plutôt que les hauteurs des poutres elles-mêmes.

En effet, nous nous intéressons à l'action de l'eau sur la poutre, et cette action ne peut s'exercer que sur la partie immergée de la poutre. La hauteur immergée h se déduit de la hauteur de la poutre H par

$$\rho' h = \rho H$$

Pour une poutre parfaitement homogène de masse volumique ρ et un liquide environnant de masse volumique ρ' .

La considération de h au lieu de H fait ainsi intervenir implicitement le rapport des masses volumiques de la poutre et de l'eau.

Mais, comme il a déjà été indiqué, la poutre n'est pas parfaitement homogène. De plus, elle supporte des surcharges (excitateurs) et elle absorbe de l'eau au cours de ses immersions successives. Sa masse volumique moyenne n'est donc pas constante.

Nous avons donc préféré reprendre les résultats des essais relatifs à la hauteur de la poutre en calculant pour chaque mesure la hauteur immergée réelle.

Bien entendu le nouveau graphique est qualitativement semblable au précédent, c'est à dire que les points figuratifs s'alignent sur des droites parallèles dont les distances sont les mêmes que pour la poutre libre.

Mais, la pente de ces droites est égale à 1,33 (au lieu de 1,29 pour le graphique précédent), c'est à dire $4/3$

Rappelons que pour les vibrations de la poutre libre on obtient, théoriquement, et très sensiblement expérimentalement, des droites de pente - 1.

Ainsi, pour des immersions suffisantes, les périodes de résonance de la poutre flottante sont proportionnelles à $h^{-4/3}$, alors qu'elles sont proportionnelles à h^{-1} pour la poutre libre.

5. INTERPRETATION DES RESULTATS - CONCLUSION

Les essais systématiques que nous avons effectués pour préciser les variations des périodes de vibration en flexion plane verticale des poutres droites de section rectangulaire constante flottant à la surface de l'eau, montrent, ainsi que nous venons d'en rendre compte :

- que les périodes successives sont dans les mêmes rapports que pour les poutres libres
- que la longueur (si elle est suffisante) intervient sensiblement de la même façon que pour les poutres libres.
- que pour une largeur B suffisante les périodes sont proportionnelles à $B^{0,32}$ soit sensiblement $B^{1/3}$ alors qu'elles sont indépendantes de la largeur pour les poutres libres.
- que pour une immersion suffisante les périodes sont proportionnelles à $h^{-1,33}$ soit sensiblement $h^{-4/3}$, au lieu de h^{-1} pour les poutres libres.

Ainsi, si les dimensions sont suffisantes nous aurions sensiblement :

$$T = K L^2 B^{\frac{1}{3}} h^{-\frac{1}{3}}$$

pour les vibrations de la poutre flottante, au lieu de $T_a = K' L^2 h^{-1}$

pour les vibrations de la poutre libre (puisque h et H sont proportionnels).

Dans les mêmes conditions, le rapport des périodes correspondantes serait alors :

$$\frac{T}{T_a} = K'' \left(\frac{B}{h}\right)^{1/3}$$

Mais cette expression ne peut valablement être admise que pour des dimensions suffisantes.

Nous avons vu, en effet que lorsque B diminue les écarts deviennent très importants et quand B tend vers zéro, il semble que $\frac{T}{T_a}$ tende vers l'unité.

D'autre part, quand h tend vers zéro, il serait vain de chercher une expression encore valable puisque la notion de poutre s'évanouit. En effet la poutre perd sa rigidité (proportionnelle à H^3) plus rapidement que sa masse (proportionnelle à H).

D'autre part, nous avons vérifié que l'eau entourant la poutre ne semblait pas modifier l'amortissement de celle-ci dans son mouvement vibratoire, ce qui est en accord avec l'hypothèse selon laquelle l'action de l'eau est équivalente à l'adjonction d'une masse fictive.

Selon cette hypothèse, le rapport des périodes correspondantes s'écrit :

$$\frac{T}{T_a} = \sqrt{1 + \frac{M}{\rho S}}$$

Cette expression est en accord avec les résultats que nous obtenons si nous les écrivons sous la forme

$$\frac{T}{T_a} = \sqrt{1 + K \left(\frac{B}{h}\right)^{2/3}}$$

Cette dernière expression est équivalente à $K'' \left(\frac{B}{h}\right)^{1/3}$ quand B est suffisamment grand et elle tend vers 1 lorsque B est suffisamment petit.

C'est donc en définitive la forme que nous retiendrons, comme susceptible de traduire nos résultats expérimentaux.

On aurait ainsi l'allure de la variation de la masse virtuelle avec les dimensions de la section.

$$M' = k \rho S \left(\frac{B}{h}\right)^{2/3} = k \rho' B^{5/3} h^{1/3}$$

CHAPITRE II

-:-:-:-

EXPRESSION THEORIQUE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

SOMMAIRE

=====

1. Introduction

2. Hypothèses. Notations

- 21. Hypothèses
- 22. Notations - Repère

3. Transformation conforme

- 31. La transformation
- 32. Surface libre
- 33. Flanc de la poutre
- 34. Fond de la poutre
- 35. Paramètre définissant la section immergée

4. Potentiel complexe

- 41. Hypothèses
- 42. Détermination du potentiel complexe

5. Action du liquide sur la poutre flottante

- 51. Equation de Bernoulli
- 52. Résultats des actions de la poutre sur le liquide

6. Vibrations de la poutre flottante

- 61. Equation différentielle du mouvement
- 62. Périodes de vibration

7. Résultats numériques

- 71. Calculs effectués
- 72. Tableau de valeurs numériques
- 73. Courbes représentatives des fonctions
- 74. Intégrale double J
- 75. Rapport des périodes en fonction de $\frac{B}{h}$

8. Expression approchée

9. Conclusion

1. INTRODUCTION

=====

Lorsqu'une poutre vibre en flottant à la surface d'un liquide, ses fréquences naturelles sont considérablement plus faibles que les fréquences des modes correspondants de vibration de la même poutre quand elle est libre.

Nous nous proposons ici de chercher à exprimer les fréquences de vibration en flexion plane verticale pour des poutres droites de section rectangulaire constante flottant à la surface d'un liquide.

Puisque la diminution de fréquence, pour un même mode de vibration est due à l'action du liquide sur la poutre, il est naturel de chercher d'abord à expliciter cette action au cours du mouvement vibratoire envisagé.

Pour cette étude nous ne ferons aucune hypothèse à priori quant à la forme de cette action, ou à la possibilité de la traduire éventuellement par l'introduction d'une masse virtuelle de liquide qui serait entraîné avec la poutre. Nous préférons étudier directement l'écoulement du liquide autour de la poutre.

Là encore, nous considérerons directement la poutre flottante, sans passer par l'intermédiaire d'une poutre semblable qui serait complètement immergée, comme il est classique de le faire.

Nous étudierons l'écoulement autour de la poutre par la méthode des "tranches", c'est à dire l'écoulement dans un plan de section droite de la poutre, après avoir fait certaines hypothèses simplificatrices. Cette étude sera effectuée au moyen d'une transformation conforme réalisée en suivant les conseils de MM. PIRONNEAU et GUEVEL.

L'écoulement ayant été défini autour de la poutre, nous en déduirons l'expression de l'action exercée par le liquide sur la poutre. Il ne restera alors qu'à revenir au mouvement qu'effectue la poutre quand elle est soumise à une telle action.

2. HYPOTHESE. NOTATIONS.

=====

21. HYPOTHESES

Nous nous proposons d'étudier les vibrations d'une poutre élastique flottant à la surface d'un liquide, et nous nous limitons au cas d'une poutre droite, homogène et de section rectangulaire constante.

Nous formons les hypothèses suivantes :

a) La poutre vibre en flexion plane dans un plan vertical -
(plan de symétrie longitudinal de la poutre)

b) Les vibrations de la poutre sont harmoniques, de pulsation

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t$$

c) Le liquide entourant la poutre est un liquide parfait -

d) Le mouvement du liquide autour de la poutre est bidimensionnel, s'effectuant dans le plan de section droite. Cette hypothèse implique en particulier

- d'une part que la déformée de la poutre reste presque rectiligne

- d'autre part, que la poutre soit suffisamment longue pour que l'on puisse négliger les effets des extrémités.

22. NOTATIONS. REPERE DE REFERENCE. ECOULEMENT -

Nous posons :

B : largeur de la poutre

H : hauteur totale de la poutre

h : hauteur immergée

S : Section droite de la poutre

I : moment d'inertie de la section droite par rapport à son axe neutre en flexion.

E : module d'élasticité longitudinale du matériau

ρ : masse volumique de la poutre

ρ' : masse volumique du liquide environnant.

Nous adoptons comme repère de référence un repère orthonormé direct $o x y z$ lié à la poutre :

- l'origine O est prise au centre de la face inférieure de la poutre
- les axes Ox et Oy sont pris dans le plan de section droite de la poutre, Oy étant vertical ascendant.

On désignera par z un plan de section droite de la poutre.

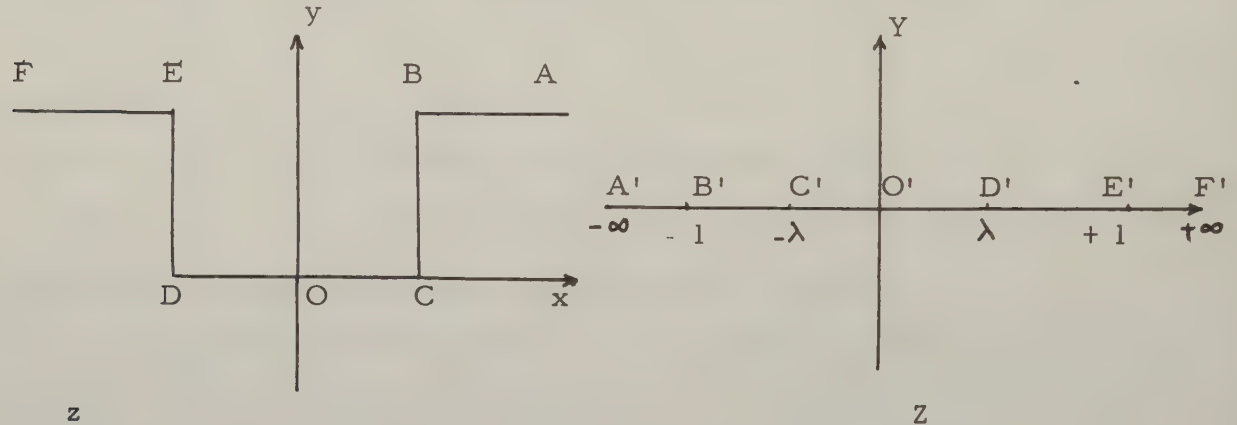
L'écoulement que nous nous proposons d'étudier est l'écoulement plan du liquide par rapport à la poutre considérée comme fixe, autour de celle-ci dans un plan z .

3. TRANSFORMATION CONFORME

=====

31. LA TRANSFORMATION

Pour étudier l'écoulement autour de la poutre dans le plan z , nous effectuons une transformation conforme du plan z sur le plan Z telle qu'au contour polygonal ABCDEF constitué par la trace de la surface libre et le contour immergé de la poutre, corresponde l'axe réel du plan Z .



Si on suit l'axe réel du plan Z de $-\infty$ à $+\infty$, $\frac{dz}{dZ}$ doit avoir pour argument : sur $A'B'$: π , sur $B'C'$: $\frac{3\pi}{2}$, sur $C'D'$: π , sur $D'E'$: $\frac{\pi}{2}$ et sur $E'F'$:

La transformation envisagée est la transformation de Schwarz

$$\frac{dz}{dZ} = -A (Z - Z_B)^{-1/2} (Z - Z_C)^{+1/2} (Z - Z_D)^{+1/2} (Z - Z_E)^{-1/2}$$

ou A est une constante réelle positive.

Pour conserver la symétrie, on peut choisir $Z_B = -1$, $Z_C = -\lambda$, $Z_D = \lambda$

$$\text{et } Z_E = +1$$

A et λ seront déterminés par les dimensions B et h de la partie immergée en appliquant la transformation de Schwarz entre B et C d'une part et entre C et D d'autre part.

32. SUR LA SURFACE LIBRE AB

$$Z < -1 < -\lambda < +\lambda < +1$$

$$dz = -A \sqrt{\frac{Z^2 - \lambda^2}{Z^2 - 1}} dZ$$

Posons $Z = -\frac{1}{u} \quad (u_A = 0 \quad u_B = +1)$

$$dz = -A \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 u^2}{1 - u^2}} \frac{du}{u^2}$$

$$z - z_B = -A \int_1^u \frac{1 - \lambda^2 u^2}{u^2} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \lambda^2 u^2)}} = -A \left[\int_1^u \frac{du}{u^2 \sqrt{\Delta}} - {}^2 K(\lambda, u) \right]$$

avec $\Delta = (1 - u^2)(1 - \lambda^2 u^2)$

$$d'où \quad \Delta' = -2\lambda^2 u(1 - u^2) - 2u(1 - \lambda^2 u^2) = -2u(1 + \lambda^2 - 2\lambda^2 u^2)$$

$$u \frac{\Delta'}{2} - \Delta = 2\lambda^2 u^4 - (1 + \lambda^2)u^2 - [1 - (1 + \lambda^2)u^2 + \lambda^2 u^4] = \lambda^2 u^4 - 1$$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{u} \right) = \frac{u \frac{\Delta'}{2} - \Delta}{u^2 \sqrt{\Delta}} = \frac{\lambda^2 u^2}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{u^2 \sqrt{\Delta}} = -\frac{(1 - \lambda^2 u^2) - 1}{\sqrt{\Delta}} = -\frac{1}{u^2 \sqrt{\Delta}}$$

$$\frac{1}{u^2 \sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} - \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 u^2}{1 - u^2}} = \frac{d}{du} \frac{\sqrt{\Delta}}{u}$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{\Delta}} = K(\lambda, u) - E(\lambda, u) - \frac{\sqrt{\Delta}}{u} + \text{Cte}$$

$$z - z_B = A \left\{ \frac{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \lambda^2 u^2)}}{u} - (1 - \lambda^2) [K(\lambda, u) - K(\lambda)] + E(\lambda, u) - E(\lambda) \right\}$$

33. SUR LE FLANC BC

$$-1 < z < -\lambda < +\lambda < +1$$

$$dz = -A i \sqrt{\frac{z^2 - \lambda^2}{1 - z^2}} dz$$

Posons $u^2 = \frac{1 - z^2}{1 - \lambda^2}$ et $\lambda'^2 = 1 - \lambda^2$

$$z = \sqrt{1 - \lambda'^2 u^2} \quad dz = \frac{-\lambda'^2 u du}{\sqrt{1 - \lambda'^2 u^2}}$$

$$dy = A \lambda'^2 \frac{(1 - u^2) du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \lambda'^2 u^2)}} = + A \left\{ \sqrt{\frac{1 - \lambda'^2 u^2}{1 - u^2}} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \lambda'^2 u^2)}} \right\}$$

et en intégrant :

$$y - y_B = -A \left[E(\lambda', u) - \lambda'^2 K(\lambda', u) \right]$$

On a en particulier $y_C - y_B = -h$, c'est à dire :

$$h = A \left[E(\lambda') - \lambda'^2 K(\lambda') \right]$$

34. SUR LE FOND DE LA POUTRE CD

$$-1 < -\lambda < z < +\lambda < +1$$

$$dz = -A \sqrt{\frac{\lambda^2 - z^2}{1 - z^2}} dz$$

Posons $z = \lambda u$ ($u_C = -1$, $u_O = 0$, $u_D = +1$)

Il vient

$$dz = dx = -A \lambda^2 \sqrt{\frac{1 - u^2}{1 - \lambda^2 u^2}} du = -A \lambda^2 \frac{(1 - u^2) du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \lambda^2 u^2)}}$$

$$dx = - A \left[\sqrt{\frac{1 - \lambda^2 u^2}{1 - u^2}} + (\lambda^2 - 1) \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \lambda^2 u^2)}} du \right]$$

et en intégrant :

$$x = A \left[E(\lambda, u) - (1 - \lambda^2) K(\lambda, u) \right]$$

en particulier : $x_C = \frac{B}{2}$, c'est à dire :

$$\frac{B}{2} = A \left[E(\lambda) - (1 - \lambda^2) K(\lambda) \right]$$

35. PARAMETRES DEFINISSANT LA SECTION IMMERGEE

On peut caractériser la forme de la section immergée de la poutre par le paramètre sans dimension $\frac{B}{h}$, et sa grandeur par la surface $S' = Bh$

Mais on peut aussi utiliser les paramètres précédents λ et A qui en sont fonctions.

On peut noter d'ailleurs que λ est seulement fonction de la forme c'est à dire de $\frac{B}{h}$ et réciproquement, on peut exprimer $\frac{B}{h}$ en fonction de λ seul.

Nous poserons dans la suite :

$$\lambda = \sin \theta$$

$$\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2} = \cos \theta$$

et les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce

$$K(\lambda) = K \quad K(\lambda') = K' \quad E(\lambda) = E \quad E(\lambda') = E'$$

$$\text{posons encore} \quad E' - \lambda'^2 K' = \alpha \quad \text{et} \quad E - \lambda^2 K = \beta$$

On aura ainsi :

$$h = A \alpha$$

$$B = 2 A$$

$$\frac{B}{h} = \frac{2 \beta}{\alpha}$$

$$S = 2 A^2 \alpha \beta$$

4. POTENTIEL COMPLEXE

=====

41. HYPOTHESES

Nous avons déjà admis que le liquide entourant la poutre était parfait. Ainsi, puisque le mouvement s'établit à partir d'un état de repos initial, l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel. Il y a donc, avec ces hypothèses un potentiel des vitesses.

Nous avons aussi admis que l'écoulement pouvait être considéré comme plan. On peut alors le définir dans un plan de section droite au moyen d'un potentiel complexe $\mathcal{F}(z,t)$

Enfin, nous avons encore admis que les vibrations de la poutre étaient harmoniques (de pulsation ω).

Nous écrirons donc le potentiel complexe sous la forme

$$\mathcal{F}(z,t) = f(z) \cos \omega t$$

Il reste à déterminer la fonction de la variable complexe $f(z)$ par les conditions aux limites imposées.

Pour cela, nous utiliserons la transformation conforme précédemment définie et nous envisagerons, dans le plan transformé Z , une répartition convenable de sources pour représenter l'image de la surface libre du plan z .

42. DETERMINATION DU POTENTIEL COMPLEXE.

Dans la transformation conforme précédemment définie, le contour ABCDEF constitué par la surface libre et le contour de la poutre dans le plan z a pour image l'axe réel du plan Z , et le domaine occupé par le liquide dans le plan z a pour image le demi-plan $Y \geq 0$ du plan Z .

Le contour de la poutre BCDE est une ligne de courant dans z et son image dans Z (c'est à dire la partie $-1, +1$ de l'axe réel) est une ligne de courant.

L'image de la surface libre est la partie de l'axe réel du plan Z telle que $|X| > 1$.

Pour traduire cette image plaçons sur cette partie de l'axe réel de Z un tapis de sources de densité μ débitant dans le demi-plan $Y > 0$.

Nous choisirons μ pour que la vitesse complexe du point correspondant ait la valeur correspondant aux hypothèses faites.

Nous formons donc l'hypothèse que le déplacement de la surface libre est à un instant donné indépendant du point considéré.

Cette hypothèse correspond aux deux cas suivants :

- Les déformations de la surface libre sont négligées et sa vitesse par rapport à la poutre est l'opposé de la vitesse absolue de celle-ci, soit $\eta - \eta_0 \cos \omega t$

- Les déformations de la surface libre sont cylindriques (de génératrice perpendiculaire à la poutre). La vitesse par rapport à la poutre est alors de la forme $v \cos \omega t$ où v est constant pour un plan de section droite z donné. (Notons que les déformations observées expérimentalement sont effectivement de cette forme, tout au moins à une certaine distance des extrémités)

Soit donc m un point de la surface libre et soit M son image dans le plan Z d'affixe $Z = s$ avec s réel et $|s| > 1$. Les vitesses complexes de m et M sont respectivement $w = u - iv$ et $W = U - iV$ avec

$$W = U - iV = \frac{df}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} = - (u - iv) A \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}}$$

d'où, en M :

$$V(M) = - A v \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}}$$

Nous cherchons $\mu(M)$ pour que la composante imaginaire de la vitesse complexe, c'est à dire $V(M)$ ait la valeur indiquée.

En un point P quelconque (d'affixe Z) du demi-plan $Y > 0$ la vitesse complexe induite par les sources $\mu(M)$ est

$$W = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{Z - s}$$

Pour un point P près de l'axe réel on aura $Z = X + i\varepsilon$

$$W(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu ds}{X - s + i\varepsilon}$$

soit a petit mais fini

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{X-a} \frac{ds}{X - s + i\varepsilon} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{X-a} \frac{(X - s - i\varepsilon) ds}{(X - s)^2 + \varepsilon^2} \quad \text{est une quantité réelle quand } \varepsilon \text{ tend vers zéro.}$$

Il en est de même pour l'intégrale prise de $X + a$ à l'infini.

Il reste à calculer l'intégrale entre $X - a$ et $X + a$.

Posons $X - s = u$

$$\frac{1}{\pi} \int_{X-a}^{X+a} \frac{ds}{X - s + i\varepsilon} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{du}{u + i\varepsilon}$$

Si μ est continu, on aura encore :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\mu du}{u + i\varepsilon} &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{(u - i\varepsilon) du}{u^2 + \varepsilon^2} = \frac{\mu}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{u^2 + \varepsilon^2}{u^2 + \varepsilon^2} \right) - i \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{u}{\varepsilon} \right]_{-a}^{+a} \\ &= -i\mu \end{aligned}$$

Ainsi, quand ε tend vers zéro, la partie imaginaire de W tend vers

$$\mu(M) = V(M) = -Av \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}}$$

En un point P quelconque du demi-plan $Y > 0$ (d'affixe Z), la vitesse complexe induite sera alors :

$$W(Z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{V ds}{Z - s} + \frac{1}{\pi} \int_{+1}^{+\infty} \frac{V ds}{Z - s}$$

Posons $t = -s$

Comme $V(t) = V(s)$, il vient

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{V ds}{Z - s} = \int_{+\infty}^{+1} \frac{-V dt}{Z + t} = \int_1^{\infty} \frac{V ds}{Z + s}$$

$$\text{et } W(Z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{V}{Z - s} + \frac{V}{Z + s} \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{2 V Z ds}{Z^2 - s^2}$$

D'où en tenant compte de l'expression de $V(s)$, et puisque v est indépendant de s :

$$W(Z) = - \frac{2 A v Z}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \frac{ds}{Z^2 - s^2}$$

On en déduit immédiatement le potentiel complexe en intégrant l'expression précédente considérée comme fonction de la variable complexe Z

$$f(Z) = - \frac{A v}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \ln \frac{Z^2 - s^2}{s^2} ds$$

5. ACTION DU LIQUIDE SUR LA POUTRE FLOTTANTE

51. EQUATION DE BERNOULLI

Nous avons défini l'écoulement autour de la poutre comme l'écoulement dérivant du potentiel complexe $\mathcal{F}(z,t) = f(z) \cos \omega t$ et $f(z)$ a été déterminé.

D'autre part, les forces de masse dont le liquide est le siège sont les forces de pesanteur et les forces d'inertie d'entraînement, puisqu'on étudie ici le mouvement par rapport à la poutre. Ces forces dérivent donc du potentiel

$$U = (g + \gamma) y$$

Dans l'écoulement considéré les demi-contours de la poutre OCB et ODE sont des lignes de courant.

Pour les points de cette ligne Z est réel. Le long de cette ligne le potentiel des vitesses s'identifie donc au potentiel complexe.

Ainsi, le long de ce contour le théorème de Bernoulli s'écrira :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + U + P + \frac{V^2}{2} = K(t)$$

Nous admettrons que les vitesses restent suffisamment petites pour que leur carré puisse être négligé devant les autres termes de l'équation ci-dessus.

Ainsi, en considérant un point M sur la face inférieure de la poutre et le point E sur la surface libre du liquide, nous aurons :

- en M (d'affixe X , $X < \lambda$) :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{A v}{\pi} \sin \omega t \int_1^\infty \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2 - X^2}{s^2} ds$$

$$U = 0$$

$$P = P_e$$

- en E (d'affixe 1) :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{A v}{\pi} \sin \omega t \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2 - 1}{s^2} ds$$

$$U = (g + \eta'') h$$

$$p = p_e \quad (\text{pression extérieure})$$

En portant ces différentes valeurs dans l'équation de Bernoulli, on en tire l'expression de la pression au point M :

$$p = p_e + \rho' h (g + \eta'') - \rho' \frac{A v \omega}{\pi} \sin \omega t \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2 - X^2}{s^2 - 1} ds$$

52. RESULTANTE DES ACTIONS DE LA POUTRE SUR LE LIQUIDE

Le liquide ayant été supposé parfait, son action sur la poutre est normale à la surface de contact.

Avec cette hypothèse et étant donnée la symétrie de la section, la seule action qui reste à considérer est celle exercée sur la face inférieure de la poutre, soit encore deux fois l'action sur la demi-section :

$$F = 2 \int_0^{B/2} p dz$$

D'où, en intégrant directement les deux premiers termes, et avec

$$dz = A \sqrt{\frac{\lambda^2 - X^2}{1 - X^2}} dX$$

pour le dernier terme

$$F = p_e B + \rho' B h (g + \eta'') - 2 \rho' \frac{A^2 v \omega}{\pi} \sin \omega t. J$$

avec

$$J = \int_0^\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - x^2}{1 - x^2}} dx \int_1^\infty \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2 - x^2}{s^2 - 1} ds$$

Comme d'autre part on a $\rho' h = \rho H$ et $HB = S$

Il vient :

$$F = p_e B + \rho S g + \rho S \eta'' - \frac{2 A^2}{\pi} \rho' v \omega \sin \omega t. \quad J$$

Les deux premiers termes sont constants (action de la pression extérieure transmise par la poutre et poids de celle-ci)

Nous achèverons le calcul de F dans le cas où $v = -\eta_0 \omega$

c'est à dire dans le cas où la vitesse de la surface libre est l'opposé de celle de la poutre (c'est à dire encore quand on peut négliger les perturbations de la surface libre).

Le coefficient de J est dans ces conditions particulières

$$- 2 \frac{A^2 v \omega}{\pi} \rho' \sin \omega t = + \frac{2 A^2}{\pi} \rho' \omega^2 \eta_0 \sin \omega t$$

Tenant compte des relations précédemment établies

$$\eta'' = -\eta_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$$2 A^2 = \frac{B h}{\alpha \beta}$$

$$\rho' B h = \rho B H = \rho S$$

Le coefficient de J s'écrit finalement :

$$- \frac{\rho S \eta''}{\pi \alpha \beta}$$

On a ainsi dans ce cas particulier :

$$F = p_e B + \rho S g - \rho S \eta'' \left[\frac{J}{\pi \alpha \beta} - 1 \right]$$

6. VIBRATIONS DE LA POUTRE FLOTTANTE

61. EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT

Nous prendrons l'équation différentielle du mouvement sous sa forme réduite c'est à dire en négligeant les termes relatifs au mouvement de rotation des sections droites et à l'effet des forces de cisaillement. Cette équation est alors, dans le cas d'une poutre libre :

$$\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = 0$$

Elle traduit le théorème de la résultante dynamique pour un élément de poutre de longueur Δz pour lequel la résultante dynamique est

$$\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Delta z$$

et la variation de l'effort tranchant entre les deux extrémités de l'élément est -

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \Delta z$$

En égalant ces deux expressions, il vient en effet

$$\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Delta z = - EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \Delta z$$

Dans le cas de la poutre flottante, on peut encore appliquer le théorème de la résultante dynamique à un élément de poutre de longueur Δz , en projection sur l'axe vertical ascendant Oy. Les différents termes sont ici :

- quantité d'accélération :

$$\rho S \Delta z \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

- forces extérieures :

- action de la pesanteur :

$$- S g \Delta z$$

- pression extérieure (face supérieure) - $p_e B \Delta z$

- variation de l'effort tranchant : $- EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \Delta z$
- action du liquide sur la poutre :

$$p_e^B \Delta z + \rho S \Delta z g - \rho S \left[\frac{J}{\pi \alpha \beta} - 1 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Delta z$$

On obtient donc finalement, de la même façon l'équation du mouvement de la poutre flottante :

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \rho S \frac{J}{\pi \alpha \beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

62. PERIODES DE VIBRATIONS

L'équation différentielle obtenue est la même que pour les vibrations de la poutre libre, le terme d'inertie étant seulement multiplié par

$$K = \frac{J}{\pi \alpha \beta}$$

La solution de cette équation est donc la même que pour la poutre libre, c'est à dire, en prenant l'origine au milieu de la poutre :

$$\eta = \eta_0 (\cos mz + A \operatorname{ch} mz) \sin \omega t \quad \text{pour un nombre } p \text{ pair de noeuds}$$

ou

$$\eta = \eta_0 (\sin mz + A \operatorname{sh} mz) \sin \omega t \quad \text{pour un nombre } p \text{ impair de noeuds.}$$

où on a posé

$$m^4 = \frac{\rho S}{EI} \frac{J}{\pi \alpha \beta} \omega^2$$

Les constantes A et m sont déterminées par les conditions initiales. Nous admettons que ces conditions restent les mêmes que pour la poutre libre, c'est à dire que l'effort tranchant d'une part et le moment de flexion d'autre part sont nuls aux extrémités de la poutre.

Dans ces conditions, ces constantes restent les mêmes que pour la poutre libre, et en particulier on aura encore

$$mL = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

Les périodes naturelles de vibration en flexion plane de la poutre flottante sont ainsi

$$T_p = \frac{8 L^2}{\pi(2p - 1)^2} \sqrt{\frac{\rho S}{EI} \frac{J}{\pi \alpha \beta}}$$

Le rapport des périodes correspondantes de vibration de la même poutre vibrant suivant un même mode en flexion plane verticale, dans le cas où la poutre flotte à la surface d'un liquide (T), et dans le cas où elle est libre (T_a), est donc donné par l'expression :

$$\boxed{\frac{T}{T_a} = \sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}}$$

dans laquelle on a posé :

$$J = \int_0^\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - x^2}{1 - x^2}} dx \int_1^\infty \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2 - x^2}{s^2 - 1} ds$$

$$\alpha = E(\lambda') - \lambda^2 K(\lambda')$$

$$\beta = E(\lambda) - \lambda'^2 K(\lambda)$$

étant défini par la relation $\frac{B}{h} = \frac{2\beta}{\alpha}$

Notons enfin que l'expression obtenue est en accord avec la notion de masse virtuelle, laquelle n'avait pas été posée à priori. La masse virtuelle linéique de la poutre flottante vibrant en flexion plane serait le nouveau terme d'inertie de l'équation différentielle obtenue, c'est à dire

$$\mu = \rho S \frac{J}{\pi \alpha \beta}$$

7. RESULTATS NUMERIQUES

71. CALCULS EFFECTUES

Ainsi qu'il a déjà été indiqué, nous avons utilisé comme variable principale pour définir la forme de la section rectangulaire étudiée, le paramètre θ

$$\theta = \text{Arc sin } \lambda$$

Etant donnée la symétrie de la plupart des fonctions rencontrées, nous avons aussi introduit simultanément

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{et} \quad \lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2} = \sin \theta'$$

Les valeurs des intégrales elliptiques complètes

- de première espèce $K = K(\lambda)$ et $K' = K(\lambda')$
- et de seconde espèce $E = E(\lambda)$ et $E' = E(\lambda')$

sont données par des tables.

Nous avons déduit de ces valeurs, pour chaque valeur de θ de degré en degré, les valeurs correspondantes de α et de β , puis celles du produit $\alpha\beta$ et enfin celles du rapport $\frac{B}{h}$ caractéristique de la forme, par $\frac{B}{h} = \frac{2\beta}{\alpha}$

Nous donnons toutes ces valeurs numériques dans le premier tableau annexe.

Puis, nous avons construit les courbes représentatives de α , de β , de $\alpha\beta$ et de $\frac{B}{h}$ en fonction de θ , les trois premières en coordonnées linéaires, et la dernière en coordonnées semi-logarithmiques ($\frac{B}{h}$ variant de 0 à l'infini pour θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$)

D'autre part l'intégrale double J a été calculée numériquement pour un certain nombre de valeurs de λ par le Centre de Calcul automatique de l'E.N.S.M. Nous donnons également ces résultats numériques dans le deuxième tableau annexe, ainsi que la courbe représentative des variations de l'intégrale J en fonction également de θ

Il ne restait plus alors, pour chaque valeur de θ qu'à associer les valeurs correspondantes de $\frac{B}{h}$ et de $\frac{T}{T_a} = \frac{J}{\pi \alpha \beta}$

Nous donnons finalement la courbe représentative des variations du rapport $\frac{T}{T_a}$ en fonction du rapport $\frac{B}{h}$.

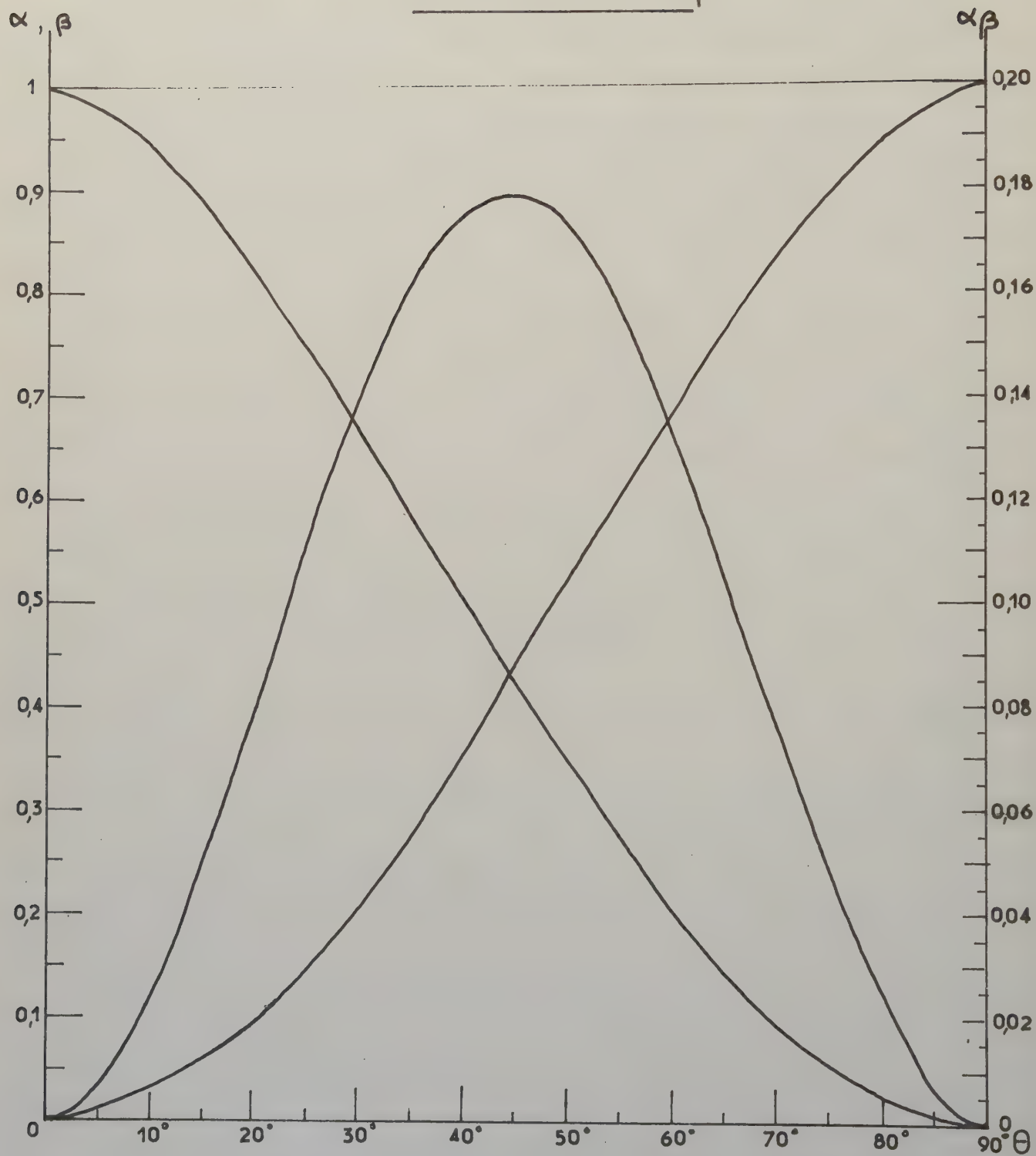
La courbe est construite effectivement, en coordonnées logarithmiques, pour des valeurs de $\frac{B}{h}$ variant de 1 à 100.

On peut remarquer que $\frac{T}{T_a}$ tend vers 1 quand $\frac{B}{h}$ tend vers 0 (action nulle du liquide sur la poutre), et croît indéfiniment avec $\frac{B}{h}$ (croissance de l'action de l'eau et diminution de la rigidité de la poutre).

θ°	λ	K	E	α	$\frac{B}{h}$	$\sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$	$\alpha \beta$	$\frac{B}{h}$	$\sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$	$\alpha \beta$	$\frac{B}{h}$	α	E	K	λ	θ°
0	0	1,5708	1,5708	1	0	1	0	0	1	0	∞	0	1	∞	1	90
1	0,0175	1,5709	1,5707	0,9981	0,0006	1,001	0,0003	0,0006	1,001	0,0003	2860	0,0003	1,0008	5,4349	0,9998	89
2	0,0349	1,5713	1,5703	0,9978	0,0014	1,002	0,0007	0,0014	1,002	0,0007	892	0,0007	1,0026	4,7427	0,9994	88
3	0,0523	1,5719	1,5697	0,9937	0,0044	1,004	0,0022	0,0044	1,004	0,0022	512	0,0022	1,0053	4,3387	0,9986	87
4	0,0698	1,5727	1,5689	0,9888	0,0078	1,006	0,0038	0,0078	1,006	0,0038	334	0,0038	1,0086	4,0528	0,9976	86
5	0,0872	1,5738	1,5678	0,9836	0,0104	1,008	0,0058	0,0104	1,008	0,0058	227	0,0058	1,0127	3,8317	0,9962	85
6	0,1045	1,5751	1,5665	0,9774	0,0176	1,010	0,0084	0,0176	1,010	0,0084	164,6	0,0084	1,0172	3,6519	0,9945	84
7	0,1219	1,5767	1,5649	0,9704	0,0244	1,012	0,0115	0,0244	1,012	0,0115	135,8	0,0115	1,0223	3,5004	0,9925	83
8	0,1392	1,5785	1,5632	0,9624	0,0318	1,014	0,0146	0,0318	1,014	0,0146	99,4	0,0146	1,0278	3,3699	0,9903	82
9	0,1564	1,5805	1,5611	0,9540	0,0404	1,016	0,0184	0,0404	1,016	0,0184	79,2	0,0184	1,0338	3,2553	0,9877	81
10	0,1736	1,5828	1,5589	0,9451	0,0506	1,019	0,0226	0,0506	1,019	0,0226	65,2	0,0226	1,0401	3,1534	0,9845	80
11	0,1908	1,5854	1,5564	0,9354	0,0614	1,022	0,0268	0,0614	1,022	0,0268	54,08	0,0268	1,0468	3,0617	0,9816	79
12	0,2079	1,5882	1,5537	0,9251	0,0740	1,025	0,0326	0,0740	1,025	0,0326	45,70	0,0326	1,0538	2,9786	0,9781	78
13	0,2250	1,5913	1,5507	0,9142	0,0876	1,029	0,0366	0,0876	1,029	0,0366	38,88	0,0366	1,0611	2,9026	0,9744	77
14	0,2419	1,5946	1,5476	0,9022	0,1030	1,034	0,0418	0,1030	1,034	0,0418	33,51	0,0418	1,0686	2,8327	0,9703	76
15	0,2588	1,5981	1,5442	0,8913	0,1198	1,042	0,0474	0,1198	1,042	0,0474	29,14	0,0474	1,0764	2,7681	0,9659	75
16	0,2756	1,6020	1,5405	0,8786	0,1372	1,047	0,0528	0,1372	1,047	0,0528	25,46	0,0528	1,0844	2,7081	0,9613	74
17	0,2924	1,6061	1,5367	0,8670	0,1566	1,051	0,0588	0,1566	1,051	0,0588	22,46	0,0588	1,0927	2,6521	0,9563	73
18	0,3090	1,6105	1,5326	0,8528	0,1782	1,059	0,0647	0,1782	1,059	0,0647	19,84	0,0647	1,1011	2,5998	0,9511	72
19	0,3256	1,6151	1,5283	0,8392	0,2016	1,067	0,0708	0,2016	1,067	0,0708	17,62	0,0708	1,1096	2,5507	0,9455	71
20	0,3420	1,6200	1,5238	0,8220	0,2272	1,074	0,0767	0,2272	1,074	0,0767	16,09	0,0767	1,1184	2,5046	0,9397	70
21	0,3584	1,6252	1,5191	0,8120	0,2486	1,077	0,0833	0,2486	1,077	0,0833	14,20	0,0833	1,1272	2,4610	0,9336	69
22	0,3746	1,6307	1,5141	0,7966	0,2816	1,084	0,0894	0,2816	1,084	0,0894	12,10	0,0894	1,1362	2,4198	0,9272	68
θ°	λ	K	E	β	$\frac{B}{h}$	$\sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$	$\alpha \beta$	$\frac{B}{h}$	$\sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$	$\alpha \beta$	$\frac{B}{h}$	α	E	K	λ	θ°

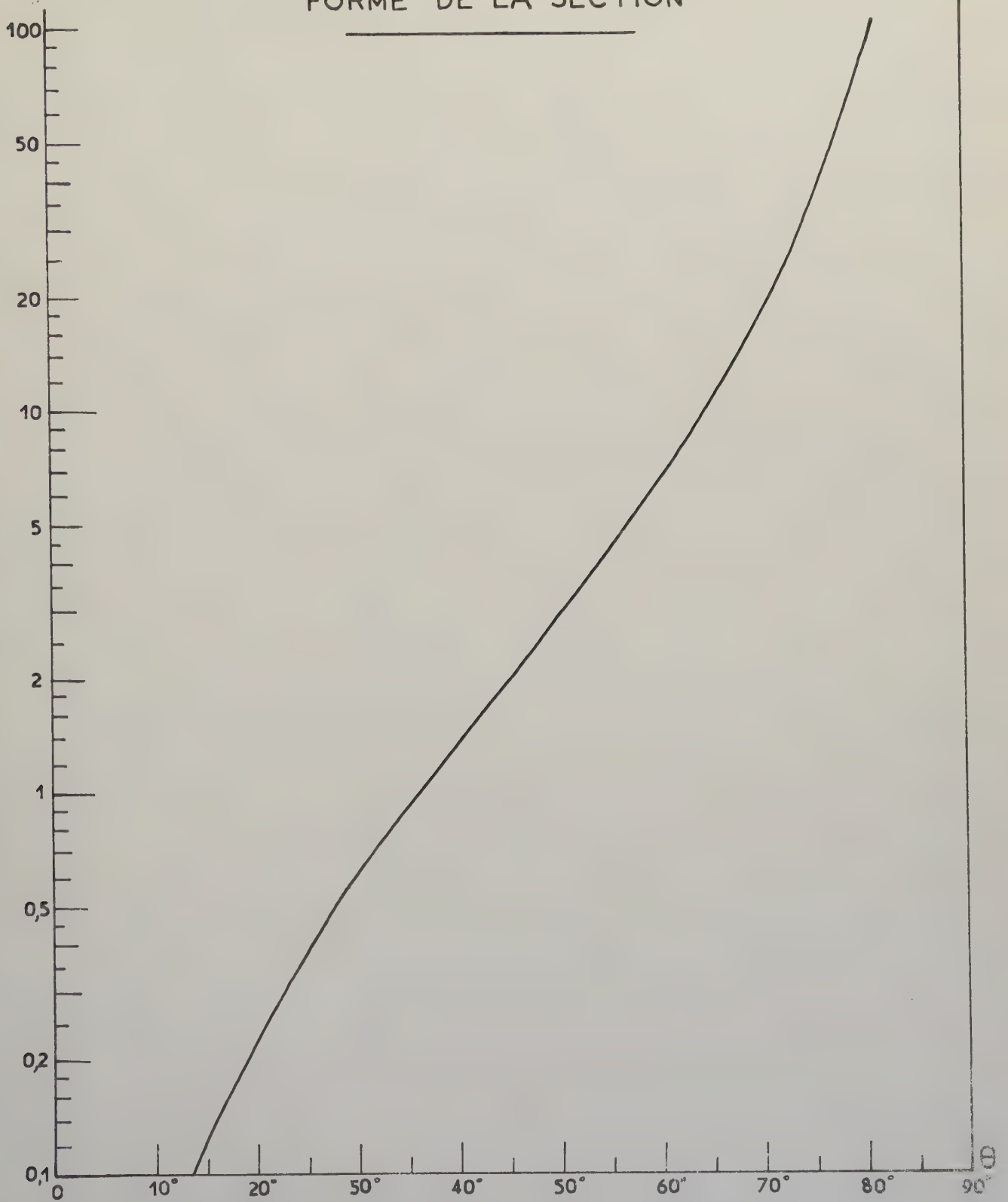
θ°	λ	K	E	α	$\frac{B}{h}$	$\sqrt{\frac{J}{\pi\alpha\beta}}$	$\alpha\beta$			β	E'	K'	λ'	θ'
23	0,3909	1,6365	1,5090	0,7818	0,3126	1,090	0,0955	2,033	12,80	0,1222	1,1453	2,3809	0,9205	67
24	0,4067	1,6426	1,5037	0,7667	0,3480	1,096	0,1024	1,963	11,26	0,1335	1,1545	2,3439	0,9135	66
25	0,4226	1,6490	1,4981	0,7521	0,3826	1,102	0,1080	1,910	10,47	0,1437	1,1638	2,3088	0,9063	65
26	0,4384	1,6557	1,4924	0,7359	0,4210	1,109	0,1140	1,860	9,582	0,1549	1,1732	2,2754	0,8988	64
27	0,4540	1,6627	1,4864	0,7202	0,4620	1,116	0,1198	1,813	8,656	0,1664	1,1826	2,2435	0,8910	63
28	0,4695	1,6701	1,4803	0,7152	0,4986	1,124	0,1275	1,755	8,023	0,1783	1,1920	2,2132	0,8829	62
29	0,4848	1,6777	1,4740	0,6881	0,5538	1,131	0,1312	1,729	7,224	0,1906	1,2015	2,1842	0,8746	61
30	0,5000	1,6858	1,4675	0,6720	0,6050	1,140	0,1366	1,685	6,612	0,2032	1,2111	2,1565	0,8660	60
31	0,5150	1,6941	1,4608	0,6556	0,6592	1,149	0,1417	1,654	6,068	0,2161	1,2206	2,1300	0,8572	59
32	0,5299	1,7028	1,4539	0,6391	0,7176	1,158	0,1466	1,617	5,574	0,2293	1,2301	2,1047	0,8480	58
33	0,5446	1,7119	1,4469	0,6226	0,7796	1,169	0,1511	1,579	5,131	0,2427	1,2397	2,0804	0,8387	57
34	0,5592	1,7214	1,4397	0,6060	0,8362	1,180	0,1573	1,554	4,783	0,2593	1,2492	2,0571	0,8290	56
35	0,5736	1,7312	1,4323	0,5892	0,9182	1,192	0,1593	1,531	4,356	0,2705	1,2587	2,0347	0,8192	55
36	0,5878	1,7415	1,4248	0,5725	0,9956	1,204	0,1631	1,508	4,018	0,2850	1,2681	2,0133	0,8090	54
37	0,6018	1,7522	1,4171	0,5559	1,0682	1,216	0,1649	1,484	3,745	0,2969	1,2776	1,9927	0,7986	53
38	0,6157	1,7633	1,4092	0,5392	1,1658	1,228	0,1694	1,462	3,421	0,3143	1,2870	1,9729	0,7880	52
39	0,6293	1,7748	1,4013	0,5225	1,2608	1,240	0,1720	1,440	3,173	0,3294	1,2963	1,9539	0,7771	51
40	0,6428	1,7868	1,3931	0,5057	1,3632	1,252	0,1742	1,418	2,934	0,3447	1,3055	1,9356	0,7660	50
41	0,6561	1,7992	1,3849	0,4892	1,4722	1,265	0,1761	1,398	2,717	0,3601	1,3147	1,9180	0,7547	49
42	0,6691	1,8122	1,3765	0,4726	1,5900	1,279	0,1773	1,379	2,516	0,3757	1,3238	1,9011	0,7431	48
43	0,6820	1,8256	1,3680	0,4563	1,7160	1,294	0,1783	1,363	2,331	0,3915	1,3329	1,8848	0,7314	47
44	0,6947	1,8396	1,3594	0,4402	1,8514	1,311	0,1790	1,348	2,161	0,4075	1,3418	1,8691	0,7193	46
45	0,7070	1,8551	1,3506	0,4235	2,0000	1,334	0,1794	1,334	2,000	0,4235	1,3506	1,8541	0,7071	45
θ^*	λ^*	K'	E'	β	$\frac{B}{h}$		$\alpha\beta$	$\frac{B}{h}$	$\sqrt{\frac{J}{\pi\alpha\beta}}$	α	E	K	λ	θ

COEFFICIENTS α, β



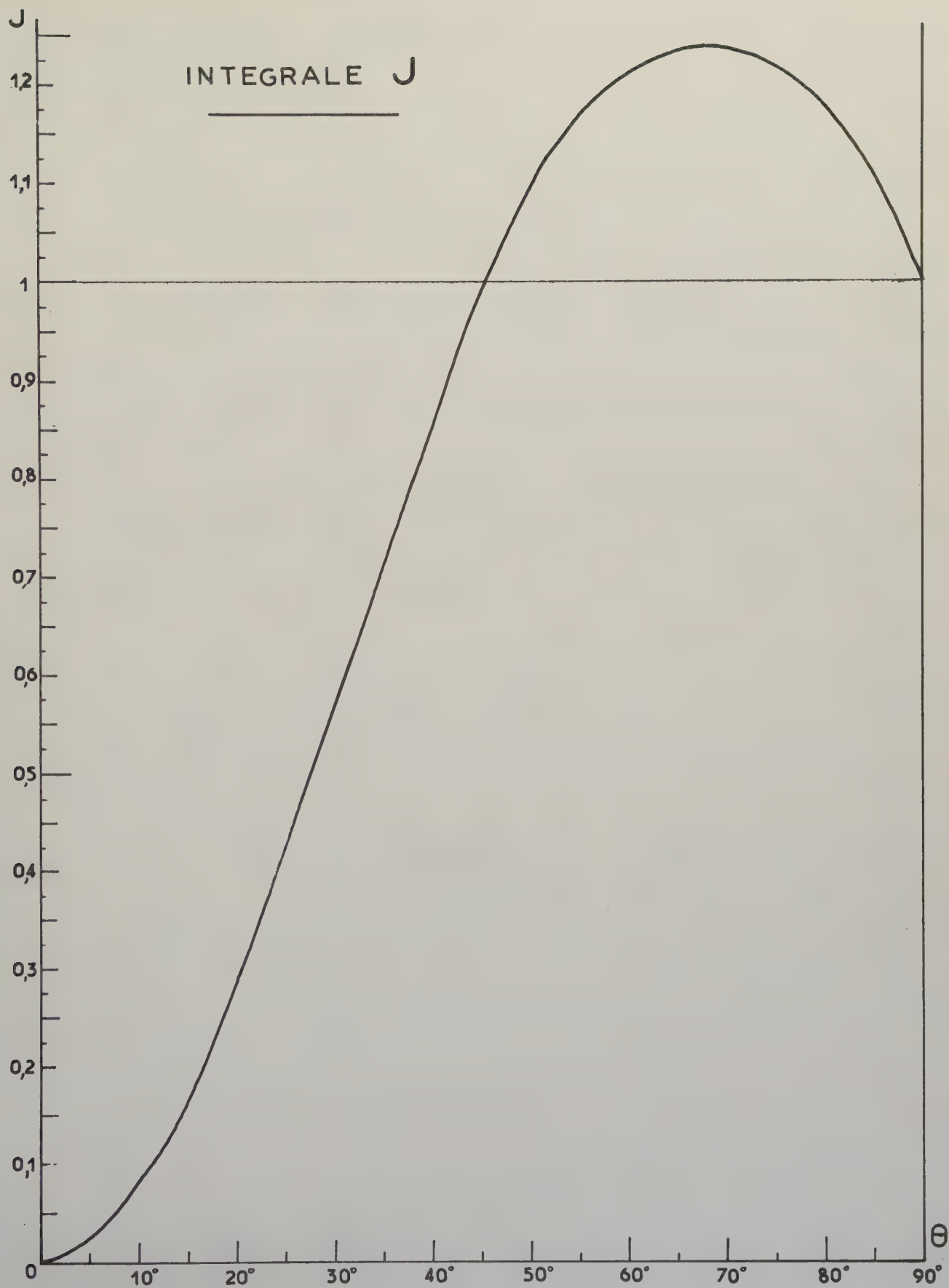
$\frac{B}{h}$

FORME DE LA SECTION

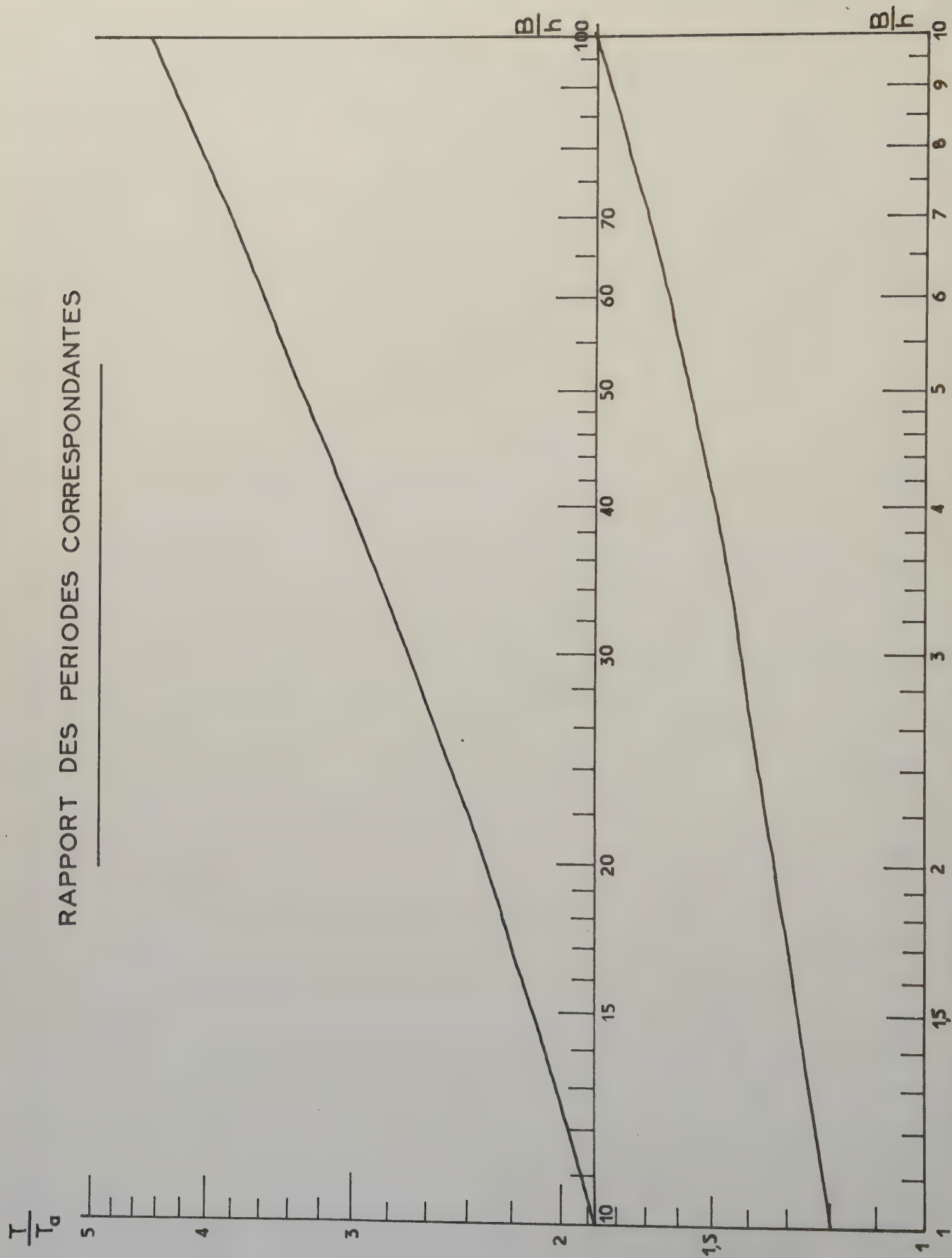


VALEURS DE L'INTEGRALE DOUBLE J CALCULEES PAR LE CENTRE DE CALCUL
DE L'E.N.S.M.

λ	J
0,01	0,000158
0,02	0,000864
0,03	0,002075
0,04	0,003788
0,05	0,005998
0,1	0,024461
0,15	0,055091
0,20	0,097546
0,25	0,151347
0,30	0,215863
0,35	0,290300
0,40	0,373678
0,45	0,464806
0,50	0,562247
0,55	0,664267
0,60	0,768763
0,65	0,873160
0,70	0,974243
0,75	1,067891
0,80	1,148585
0,85	1,208436
0,90	1,234819
0,93	1,225 4
0,96	1,183 9
0,98	1,125 0
1	1



RAPPORT DES PERIODES CORRESPONDANTES



8. EXPRESSION APPROCHEE

La courbe traduisant l'expression que nous proposons des variations du rapport $\frac{T}{T_a}$ des périodes correspondantes de la poutre flottante et de la poutre libre, en fonction du rapport $\frac{B}{h}$ des dimensions de sa section droite, a été construite en coordonnées logarithmiques.

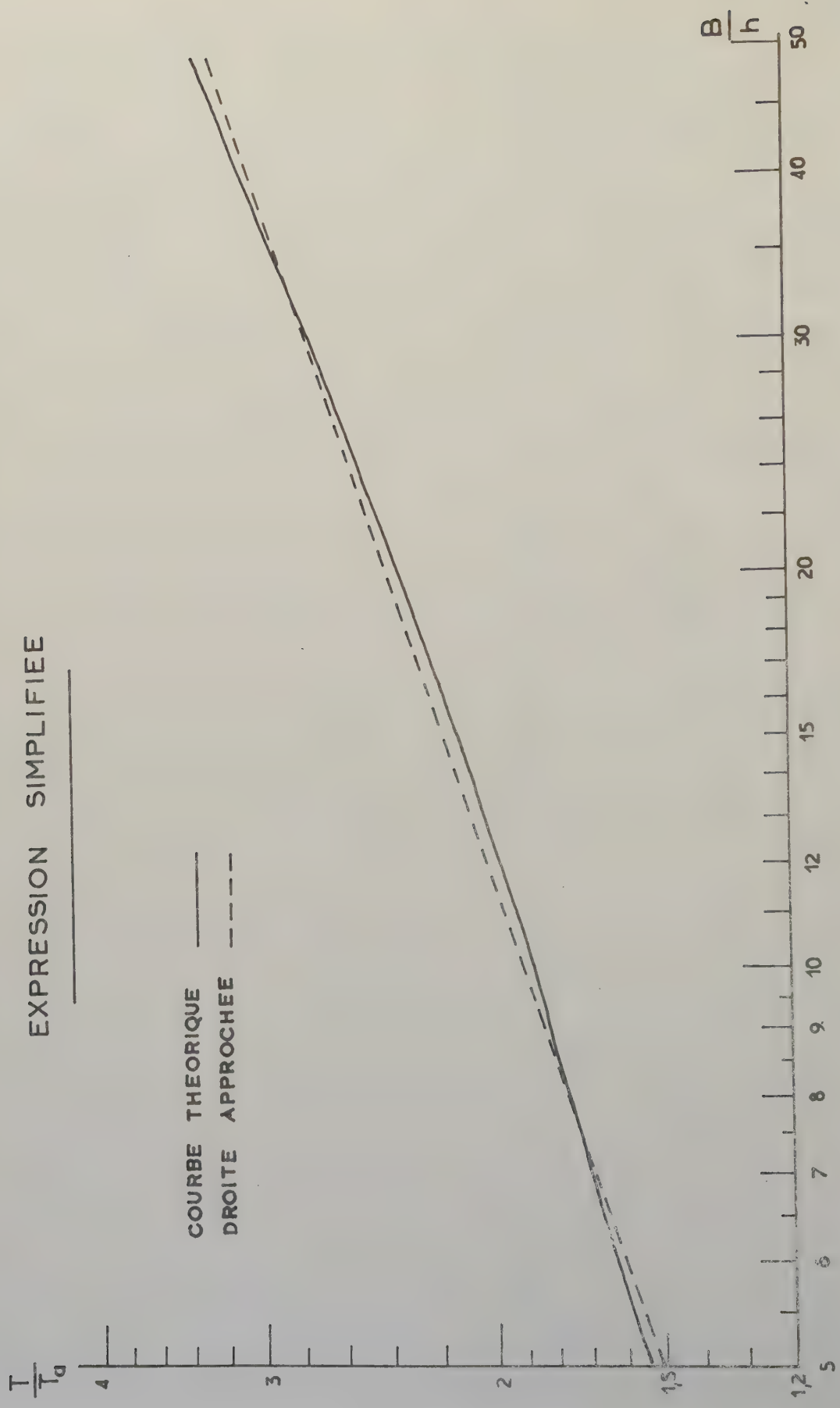
On remarque immédiatement que cette courbe conserve toujours une courbure très faible. Sur un très grand intervalle elle peut même être assimilée à une droite tout en conservant une bonne approximation.

Ainsi, par exemple, quand le rapport $\frac{B}{h}$ varie de 5 à 50, on peut remplacer la courbe obtenue par une droite en ne commettant qu'une erreur qui reste toujours inférieure à 2,5 %. Cette droite, traduisant approximativement l'expression proposée dans cet intervalle à une pente égale à 1/3

Donc, le rapport des périodes correspondantes de la poutre flottante et de la poutre libre $\frac{T}{T_a}$ peut être considéré, en première approximation, comme proportionnel à la racine cubique du rapport caractéristique de la forme de la section droite, $\frac{B}{h}$, quand celui-ci reste compris entre 5 et 50.

On aurait ainsi, entre ces limites, approximativement

$$\frac{T}{T_a} = 0,85 \left(\frac{B}{h} \right)^{1/3}$$



9. CONCLUSION

=====

Pour étudier les vibrations d'une poutre droite, homogène et de section rectangulaire constante flottant à la surface d'un liquide, nous avons recherché l'action de ce liquide sur la poutre. Pour cela, nous avons envisagé l'écoulement plan d'un liquide parfait autour d'un profil rectangulaire partiellement immergé et nous avons étudié cet écoulement au moyen d'une transformation conforme, et ceci directement pour le profil partiellement immergé.

Cette étude nous a permis d'exprimer l'action du liquide sur le profil en fonction des dimensions de celui-ci, au moyen de combinaisons d'intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce, et au moyen de l'intégrale double J :

$$J = \int_0^\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - x^2}{1 - x^2}} dx \int_1^\infty \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2 - x^2}{s^2 - 1} ds$$

En admettant dans le plan de section droite un déplacement d'ensemble de la surface libre, l'action du liquide sur la poutre s'exprime en effet :

$$F = p_e B + \rho S g + \rho S \eta'' - \frac{J}{\pi \alpha \beta} v \omega \sin \omega t$$

Si on néglige les perturbations de la surface libre, cette expression devient :

$$F = p_e B + \rho S g - \rho S \eta'' \left[\frac{J}{\pi \alpha \beta} - 1 \right]$$

Cette dernière expression est conforme à la notion généralement admise de masse virtuelle, laquelle n'a pas ici été posée à priori. Cette masse virtuelle serait :

$$\mu = \rho S \left[\frac{J}{\pi \alpha \beta} - 1 \right]$$

Les périodes de vibration naturelles de la poutre flottant à la surface du liquide ont été déduites des expressions précédentes. Le rapport des périodes correspondantes pour un même mode de vibration en flexion plane verticale, pour la poutre flottante et pour la poutre libre s'écrit :

$$\frac{T}{T_a} = \sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$$

Nous avons enfin cherché numériquement les valeurs de cette expression qui est en fonction du seul paramètre $\frac{B}{h}$ lequel caractérise la forme de la section rectangulaire. Nous avons construit la courbe représentative de cette fonction en coordonnées logarithmiques.

On peut noter que cette courbe représentative conserve toujours une courbure très faible. Pour avoir une expression approché du rapport des périodes, il est donc possible d'assimiler cette courbe à une droite avec une bonne approximation. Ainsi, par exemple, pour des variations de $\frac{B}{h}$ entre 5 et 50, on aurait approximativement

$$\frac{T}{T_a} = 0,85 \sqrt[3]{\frac{B}{h}}$$

CHAPITRE III

-:-:-:-:-

VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

-:-:-:-:-

EXTENSION AU CAS D'UNE PENICHE

-:-:-:-:-

SOMMAIRE

=====

1. Introduction

2. Variation de la largeur

- 21. Commentaire
- 22. Tableaux de mesures
- 23. Graphiques

3. Variation de la hauteur

- 31. Commentaire
- 32. Tableaux de mesures
- 33. Graphique

4. Variation de l'immersion

- 41. Commentaire
- 42. Tableau de mesures
- 43. Graphique

5. Vérifications diverses

- 51. Commentaire
- 52. Tableau de mesures
- 53. Graphique

6. Extension à des poutres de grandes dimensions

- 61. Les poutres
- 62. Obtention des vibrations
- 63. Mesures effectuées

7. Vibrations d'un caisson métallique

- 71. La poutre
- 72. Résultats
- 73. Variation des fréquences en fonction de l'immersion

8. Vibrations d'une péniche

- 81. La poutre
- 82. Variation de l'immersion
- 83. Résultats
- 84. Variations des fréquences en fonction de l'immersion

9. Conclusion

1. INTRODUCTION

=====

Nous avons établi une expression théorique des périodes de résonance d'une poutre droite de section rectangulaire constante vibrant en flexion plane verticale en flottant à la surface d'un liquide et nous avons calculé numériquement cette expression en fonction des caractéristiques géométriques de la poutre.

Cette expression théorique a été obtenue en formulant un certain nombre d'hypothèses, dont certaines nous ont un peu écarté des conditions réelles. Nous nous proposons donc ici de comparer les résultats théoriques, obtenus par application de cette expression, aux résultats expérimentaux correspondants, obtenus au cours de diverses séries d'essais systématiques.

Nous voulons également contrôler à postériori que les termes qui ont été négligés sont effectivement relatifs à des phénomènes secondaires et nous voulons déterminer dans quelle mesure ils influent sur le résultat. Cela nous permettra de vérifier la légitimité des hypothèses simplificatrices faites pour une première approximation.

Suivant les hypothèses faites et rappelées ci-dessus, l'expression du rapport des périodes de résonance correspondantes pour la poutre libre et pour la poutre flottante vibrant suivant le même mode, n'est fonction que de la forme de la section droite, laquelle peut être caractérisée par le rapport $\frac{B}{h}$ de la largeur sur l'immersion.

Pour vérifier expérimentalement le rôle de ce paramètre, nous avons effectué des séries d'essais au cours desquels nous agissions séparément sur la largeur ou sur l'immersion de la poutre. Nous donnons ici les résultats comparés de ces mesures et des calculs correspondants.

Puis, nous donnerons les mêmes résultats comparés pour des essais divers portant sur des poutres de matériaux et de dimensions divers.

Ces différents essais ont été réalisés sur bassin au Laboratoire de mécanique des fluides, et au laboratoire de Vibrations-Dynamique des Structures de l'E.N.S.M. à NANTES. Ils portent donc nécessairement tous sur

des poutres de dimensions relativement réduites (longueur maximale 4 m, largeur maximale 80 cm et hauteur maximale 60 mm).

Nous avons aussi cherché à étendre nos résultats à des poutres beaucoup plus grandes. Pour cela il fallait effectuer une expérimentation sur des poutres de dimensions nettement supérieures et confronter là encore les résultats expérimentaux aux résultats escomptés théoriquement.

Cette expérimentation a été réalisée sur un caisson et sur une péniche. La péniche en particulier a une longueur de 21 m et un poids à vide de 15 tonnes.

Ces dernières expériences ont été réalisées au Pellerin sur une péniche et sur un caisson aimablement mis à notre disposition par les Services des Ponts et Chaussées auxquels nous tenons à exprimer nos vifs remerciements.

Nous rendons compte ici de ces différentes mesures et des résultats obtenus.

2. VARIATION DE LA LARGEUR

=====

Nos essais portent sur des planches en sapin vernies dont nous avons progressivement réduit la largeur entre chaque essai.

Nous avons mesuré directement les périodes de résonance dans chaque cas, d'une part pour la poutre libre, c'est à dire reposant sur deux appuis placés aux noeuds, et d'autre part pour la poutre flottante.

Nous donnons dans les tableaux les résultats relatifs, d'une part à une planche dont la largeur a été réduite progressivement de 80 cm jusqu'à 8 cm, et d'autre part à une planche dont la largeur a été réduite de 9 cm jusqu'à 1,3 cm, chacune ayant une longueur de 2 m et une hauteur de 2 cm.

Pour chaque dimension intermédiaire nous donnons successivement :

- la largeur B de la planche, en cm,
- son immersion h (déduite de la masse) en mm,
- le rapport $\frac{B}{h}$
- la période fondamentale mesurée pour la poutre libre T_a , en ms,
- la période fondamentale mesurée pour la poutre flottante T , en ms,
- le rapport des deux périodes correspondantes mesurées,
- le rapport des deux périodes correspondantes déduit de notre expression,
- l'écart relatif de ces rapports, rapporté au rapport expérimental.

Nous constatons que les valeurs expérimentales du rapport $\frac{T}{T_a}$ sont supérieures aux valeurs théoriques, l'écart restant sensiblement constant et de l'ordre de 8 %. Pour les très grandes largeurs l'écart devient toutefois nettement plus réduit.

Nous avons également traduit graphiquement ces résultats en portant les valeurs expérimentales du rapport $\frac{T}{T_a}$ sur les graphiques en coordonnées logarithmiques sur lesquels nous avons construit la courbe théorique en fonction de $\frac{B}{h}$.

Pour les deux planches utilisées ici, c'est à dire pour une variation extrême de $\frac{B}{h}$ de 1 à 100, les points représentatifs des résultats expérimentaux s'alignent très sensiblement sur une courbe parallèle à la courbe théorique, et légèrement au dessus de celle-ci.

Tableau 1

Variation de la largeur

B _{cm}	80	60	50	45	40	35	30	25	22	20	19	17	15	14	13	12	11	10	9
m _g	13960	10460	8670	7750	6960	6130	5270	4350	3845	3500	3305	2930	2595	2425	2260	2100	1945	1775	1615
h _{mm}	8,72	8,72	8,67	8,61	8,70	8,77	8,79	8,70	8,75	8,75	8,71	8,63	8,66	8,67	8,69	8,74	8,83	8,88	8,97
$\frac{B}{h}$	91,7	68,8	57,8	52,3	46,0	40,0	36,2	28,74	25,16	22,87	21,80	19,70	17,33	16,16	14,98	13,73	12,47	11,28	10,04
T _{ams}	40,1	40,2	40,0	39,9	39,7	39,7	39,6	39,5	39,5	39,6	39,6	39,5	39,4	39,5	39,6	39,7	39,6	39,6	39,7
$\frac{T}{T_a}$	3,79	3,62	3,49	3,33	3,29	3,18	3,06	2,860	2,772	2,685	2,637	2,559	2,450	2,401	2,361	2,304	2,243	2,166	2,090
$\sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$	4,27	3,80	3,54	3,40	3,23	3,06	2,94	2,69	2,55	2,47	2,42	2,32	2,22	2,17	2,13	2,07	2,02	1,95	1,90
Δ°	+12,7	+5,0	+1,7	-2,1	-1,8	-3,7	-3,9	-5,9	-7,9	-7,8	-8,1	-9,3	-9,4	-9,6	-9,7	-10,0	-9,8	-10,0	-9,1

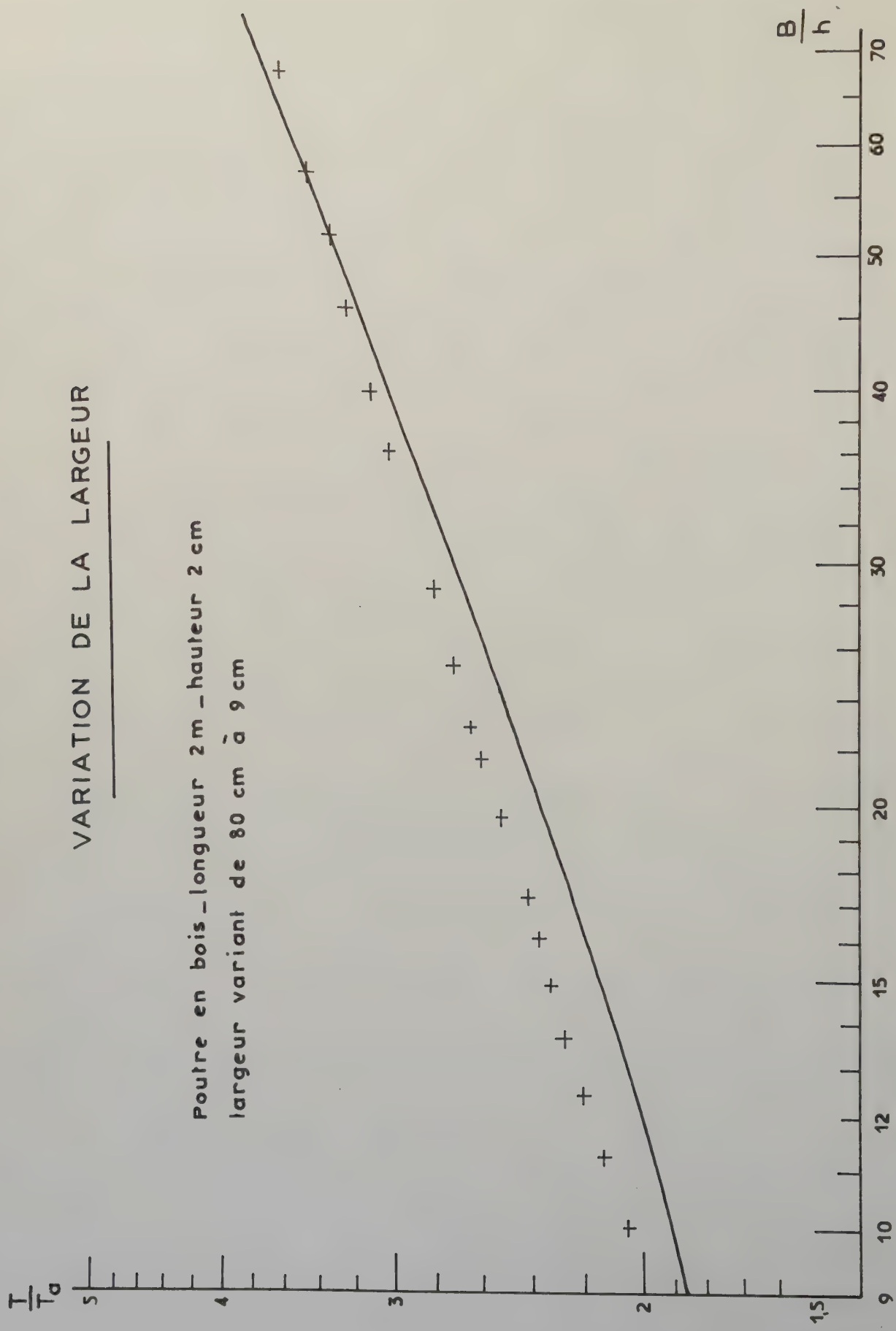
Tableau 2

Variation de la largeur

B cm	9	8	7	6	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,65	1,33
m g	1650	1470	1300	1115	0940	0860	0775	0690	0605	0505	0415	0350	0303
h mm	9,17	9,19	9,28	9,30	9,40	9,56	9,69	9,86	10,09	10,10	10,40	10,63	11,40
$\frac{B}{h}$	9,82	8,72	7,55	6,46	5,32	4,71	4,13	3,55	2,98	2,47	1,92	1,55	1,17
T _a ms	39,8	40,0	40,2	40,4	40,6	40,9	41,1	41,5	41,9	42,4	43,1	43,9	44,5
T _{ms}	84,3	82,5	80,6	77,7	73,6	72,4	70,9	69,5	68,1	66,8	66,1	64,7	59,3
$\frac{T}{T_a}$	2,120	2,062	2,003	1,924	1,814	1,771	1,726	1,674	1,626	1,576	1,533	1,478	1,335
$\sqrt{\frac{j}{\pi \alpha \beta}}$	1,878	1,810	1,738	1,668	1,591	1,550	1,511	1,470	1,427	1,382	1,324	1,281	1,231
$\Delta \text{ ‰}$	-11,3	-12,4	-13,0	-13,5	-12,1	-12,3	-12,4	-11,9	-12,2	-12,0	-12,4	-13,3	-7,8

VARIATION DE LA LARGEUR

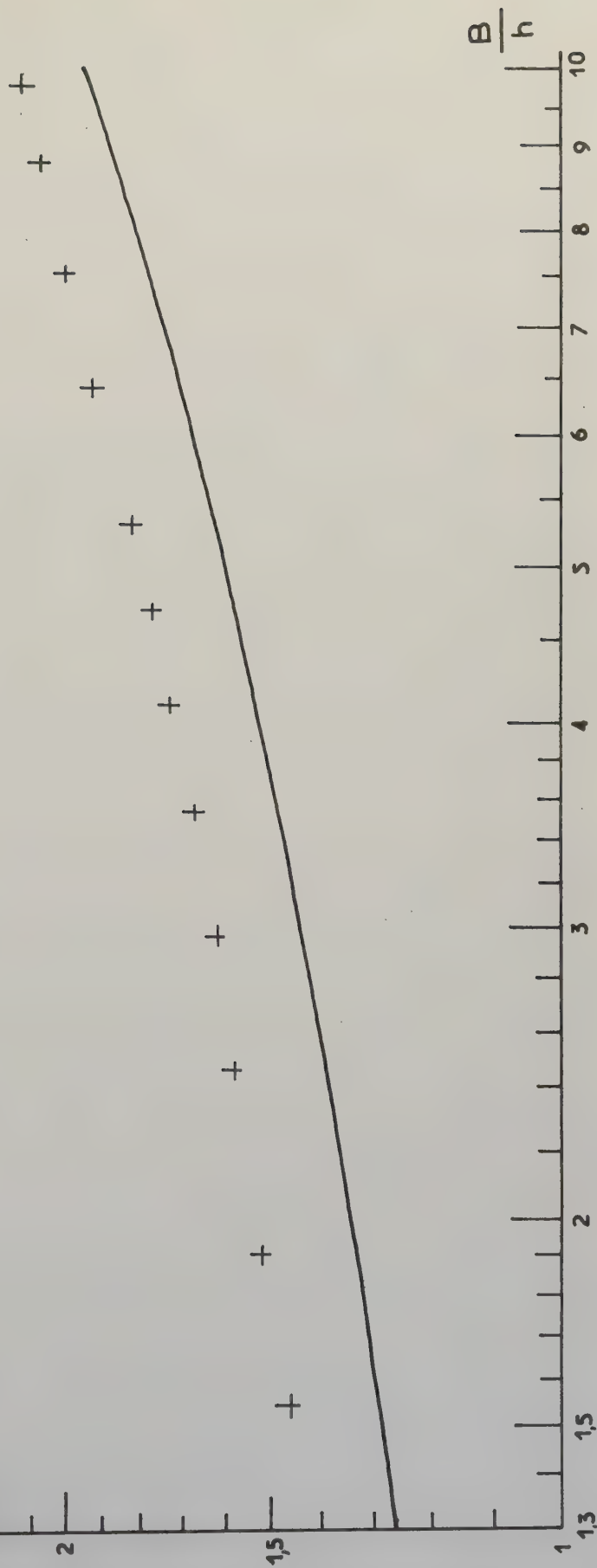
Poutre en bois - longueur 2 m - hauteur 2 cm
 largeur variant de 80 cm à 9 cm



$\frac{T}{T_0}$

VARIATION DE LA LARGEUR

Poutre en bois - longueur 2 m - hauteur 2 cm
largeur variant de 10 cm à 1,5 cm



3. VARIATION DE LA HAUTEUR

=====

Nous avons utilisé, comme pour la variation de la largeur, des planches en sapin vernies, dont nous avons cette fois diminué progressivement entre chaque essai la hauteur.

Nous avons de même mesuré directement les périodes de résonance dans chaque cas, d'une part pour la poutre placée sur deux appuis aux noeuds, et d'autre part pour la poutre flottante.

Dans le tableau 3 nous donnons les résultats relatifs à une planche dont la hauteur a ainsi été réduite progressivement de 60 mm jusqu'à 8 mm, et ayant une longueur de 2 m et une largeur de 20 cm.

(On a ainsi fait varier le rapport $\frac{B}{h}$ de 6,4 à 46)

Comme pour la série d'essais précédente, nous donnons pour chaque dimension intermédiaire les caractéristiques géométriques de la poutre, les valeurs mesurées des périodes fondamentales de la poutre libre et de la poutre flottante, ainsi que les valeurs calculées du rapport $\frac{T}{T}$ et l'écart relatif entre rapport théorique et rapport expérimental rapporté au rapport expérimental.

Nous constatons encore que les valeurs expérimentales du rapport $\frac{T}{T}$ sont supérieures aux valeurs théoriques et que l'écart relatif reste encore de l'ordre de 8 %.

Les résultats expérimentaux sont moins nets et moins sûrs pour les grandes valeurs de $\frac{B}{h}$ c'est à dire pour les planches très minces et très flexibles pour lesquelles les déformations sont de grande amplitude.

Nous avons encore traduit ces résultats sur le graphique en coordonnées logarithmiques sur lequel nous avons construit la courbe théorique en fonction du paramètre $\frac{B}{h}$.

Sur ce graphique les points représentatifs des résultats expérimentaux s'alignent encore assez sensiblement sur une courbe parallèle à la courbe théorique et située légèrement au-dessus de celle-ci.

Tableau 3

Variation de la hauteur

H mm	60	55	50	45	40	35	30	25	22	20	18	16	14	12	10	8
m g	2385	11315	10330	9265	8270	7260	6220	5235	4635	4095	3765	3315	2945	2550	2100	1740
h mm	30,96	28,29	25,82	23,16	20,67	18,15	15,55	13,09	11,59	10,24	9,41	8,29	7,36	6,37	5,25	4,35
$\frac{B}{h}$	6,47	7,08	7,75	8,65	9,68	11,04	12,87	15,29	17,28	19,52	21,2	24,1	27,2	31,4	38,1	46,0
T_a ms	13,51	14,53	16,10	17,80	19,88	22,32	26,10	32,02	36,05	40,0	44,6	49,9	56,8	66,2	79,5	100,2
T ms	24,86	27,83	31,27	35,92	42,07	50,00	61,87	78,80	93,12	108,1	121,4	136,4	164	193	248	354
$\frac{T}{T_a}$	1,84	1,95	1,94	2,02	2,12	2,24	2,37	2,46	2,58	2,70	2,72	2,74	2,89	2,92	3,12	3,54
$\sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$	1,67	1,71	1,75	1,81	1,87	1,95	2,03	2,14	2,23	2,32	2,39	2,52	2,63	2,78	3,00	3,23
$\Delta \%$	-9,2	-10,4	-9,8	-9,4	-11,8	-12,9	-14,3	-13,0	-13,5	-14,0	-12,1	-8,0	-9,0	-4,8	-3,8	-8,7

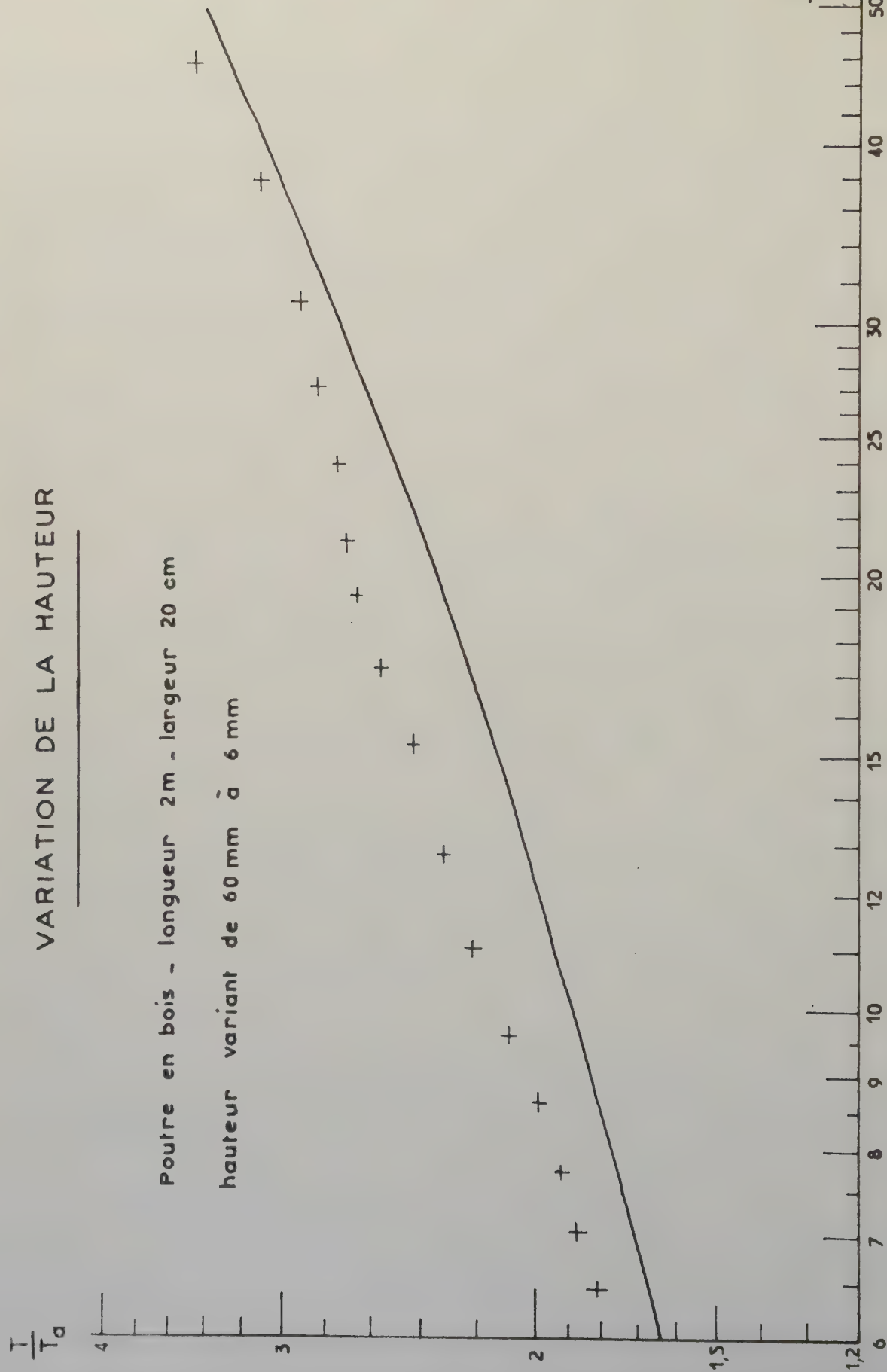
$\frac{T}{T_0}$

VARIATION DE LA HAUTEUR

Poutre en bois - longueur 2m - largeur 20 cm

hauteur variant de 60 mm à 6 mm

$\frac{B}{h}$



4. VARIATION DE L'IMMERSION

Pour faire varier l'immersion de la poutre flottante, nous avons utilisé une poutre métallique creuse que nous avons progressivement chargée avec du sable réparti sur toute sa longueur, sable dont la présence ne modifie pas la rigidité de la poutre.

Cette poutre a été réalisée avec une tôle de 1mm d'épaisseur pliée et soudée pour constituer une enveloppe parallélépipédique ouverte dont les dimensions sont les suivantes : longueur 2m, largeur 20 cm et profondeur 4cm. Cette poutre, bien que de forme géométrique très simple peut déjà être aussi considérée comme une première ébauche de bateau.

Comme pour les poutres en bois, nous avons fait vibrer cette poutre avec des charges de sables croissant progressivement jusqu'à 7 kg, d'une part en la faisant reposer sur deux appuis placés aux noeuds, et d'autre part en la faisant flotter.

Là encore, nous avons mesuré directement les périodes de résonance correspondantes pour un même mode de vibration (le mode fondamental).

Nous donnons les résultats de ces mesures et des calculs correspondants dans le tableau 4.

Nous constatons : nouveau pour toute la série de mesures que les valeurs expérimentales du rapport $\frac{T}{T_a}$ sont supérieures aux valeurs théoriques et que l'écart relatif reste très sensiblement constant et de l'ordre de 8 %.

Nous donnons aussi dans ce cas le graphique en coordonnées logarithmiques sur lequel nous avons construit d'une part la courbe théorique en fonction de $\frac{B}{h}$ et les points expérimentaux.

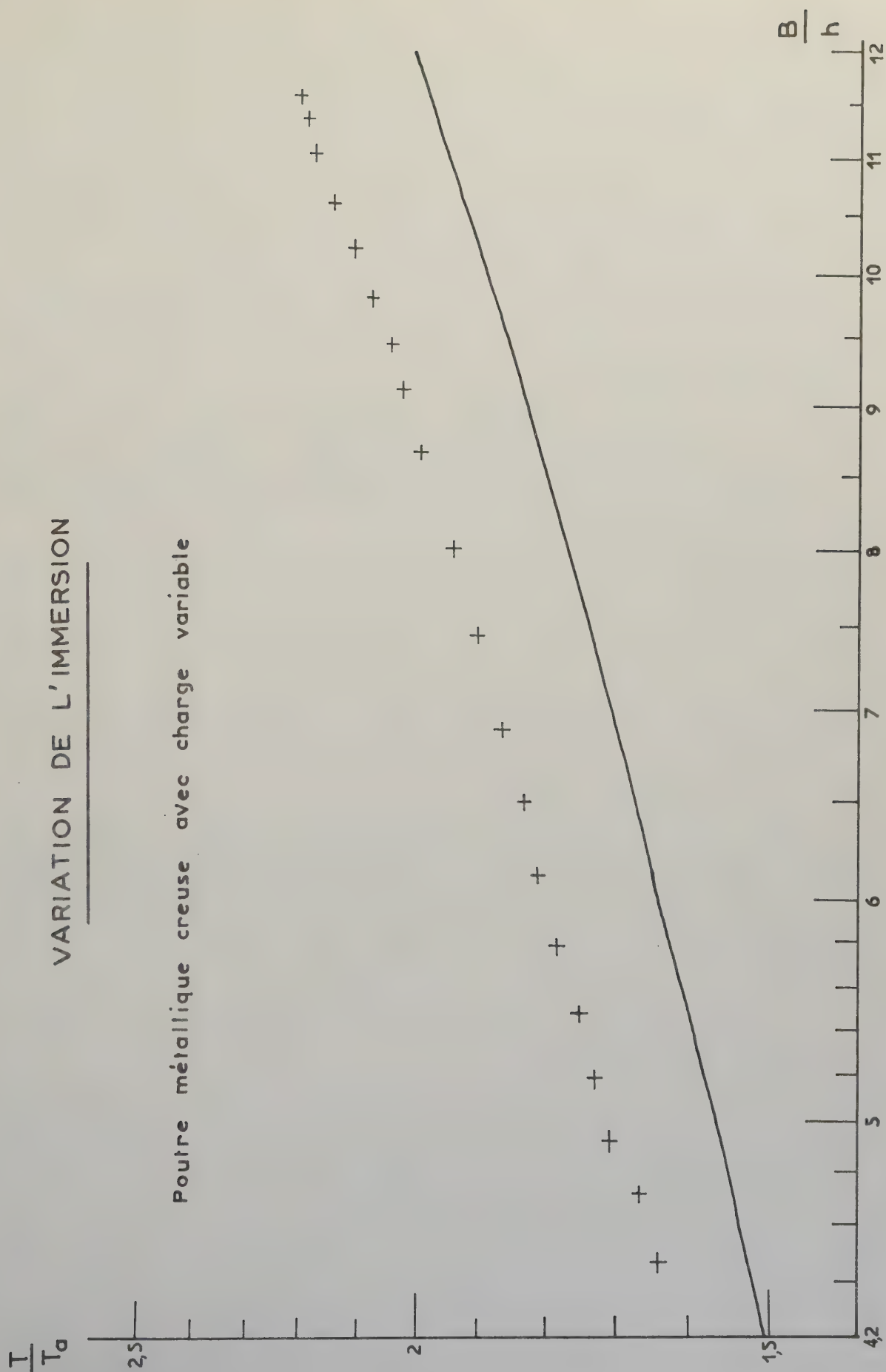
On constate à nouveau que les points représentatifs des résultats expérimentaux s'alignent très sensiblement sur une courbe parallèle à la courbe théorique et située légèrement au-dessus de celle-ci.

Variation de l'immersion

m kg	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
h mm	14,00	14,31	14,62	15,24	15,85	16,47	17,09	17,70	18,63	20,17	21,21	23,24	24,79	26,34	27,38	29,43	30,47	32,52	33,56	35,61
$\frac{B}{h}$	11,54	11,30	11,05	10,60	10,20	9,82	9,46	9,13	8,67	8,01	7,43	6,94	6,51	6,11	5,78	5,46	5,19	4,93	4,71	4,47
T_a ms	22,68	22,90	23,09	23,53	24,08	24,51	25,03	25,50	25,91	27,22	27,97	28,80	29,79	30,46	31,04	31,99	32,86	33,55	34,51	35,13
T ms	50,53	50,70	50,84	51,21	51,48	51,76	52,02	52,26	52,72	53,32	53,54	54,56	55,14	55,66	56,20	56,71	57,30	57,83	58,21	58,58
$\frac{T}{T_0}$	2,22	2,21	2,20	2,17	2,16	2,10	2,07	2,05	2,03	1,95	1,91	1,89	1,85	1,82	1,80	1,77	1,74	1,72	1,69	1,67
$\sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$	1,97	1,95	1,94	1,92	1,90	1,89	1,86	1,84	1,81	1,77	1,74	1,71	1,68	1,65	1,62	1,60	1,58	1,56	1,55	1,53
Δ %	-11,2	-11,7	-11,8	-11,7	-12,0	-9,9	-10,1	-10,2	-10,7	-9,6	-8,8	-9,5	-9,1	-9,8	-10,4	-9,5	-9,1	-9,2	-8,2	-8,3

VARIATION DE L'IMMERSION

Poutre métallique creuse avec charge variable



5. VERIFICATIONS DIVERSES

Outre les essais systématiques dont nous venons de rendre compte, nous avons encore effectué des essais divers portant sur des planches faites en des bois différents et de dimensions quelconques.

Nous avons, dans ces différents cas, encore comparé le rapport des périodes correspondantes mesurées à celui obtenu par application de notre expression théorique.

Nous donnons ces résultats divers dans le tableau 5. Pour chaque poutre nous donnons toujours les caractéristiques géométriques, les périodes fondamentales mesurées et leur rapport ainsi que le rapport théorique et l'écart relatif.

Les caractéristiques sont très diverses : longueurs de 0,8 m à 4 m, largeurs de 3,5 cm à 34 cm et hauteurs de 13 mm à 56 mm.

Les paramètres caractéristiques $\frac{B}{h}$ sont variables de 2,2 à 22,2.

Malgré la diversité des origines et des dimensions, les résultats expérimentaux restent sensiblement aussi voisins des résultats théoriques que lors des essais systématiques.

La dispersion est cependant plus grande.

Presque tous les rapports expérimentaux sont supérieurs aux rapports théoriques, l'écart maximal étant de 13 %, mais il faut signaler que quelques rapports expérimentaux sont légèrement inférieurs aux rapports théoriques correspondants.

Nous donnons enfin les graphiques en coordonnées logarithmiques comme pour les essais précédents.

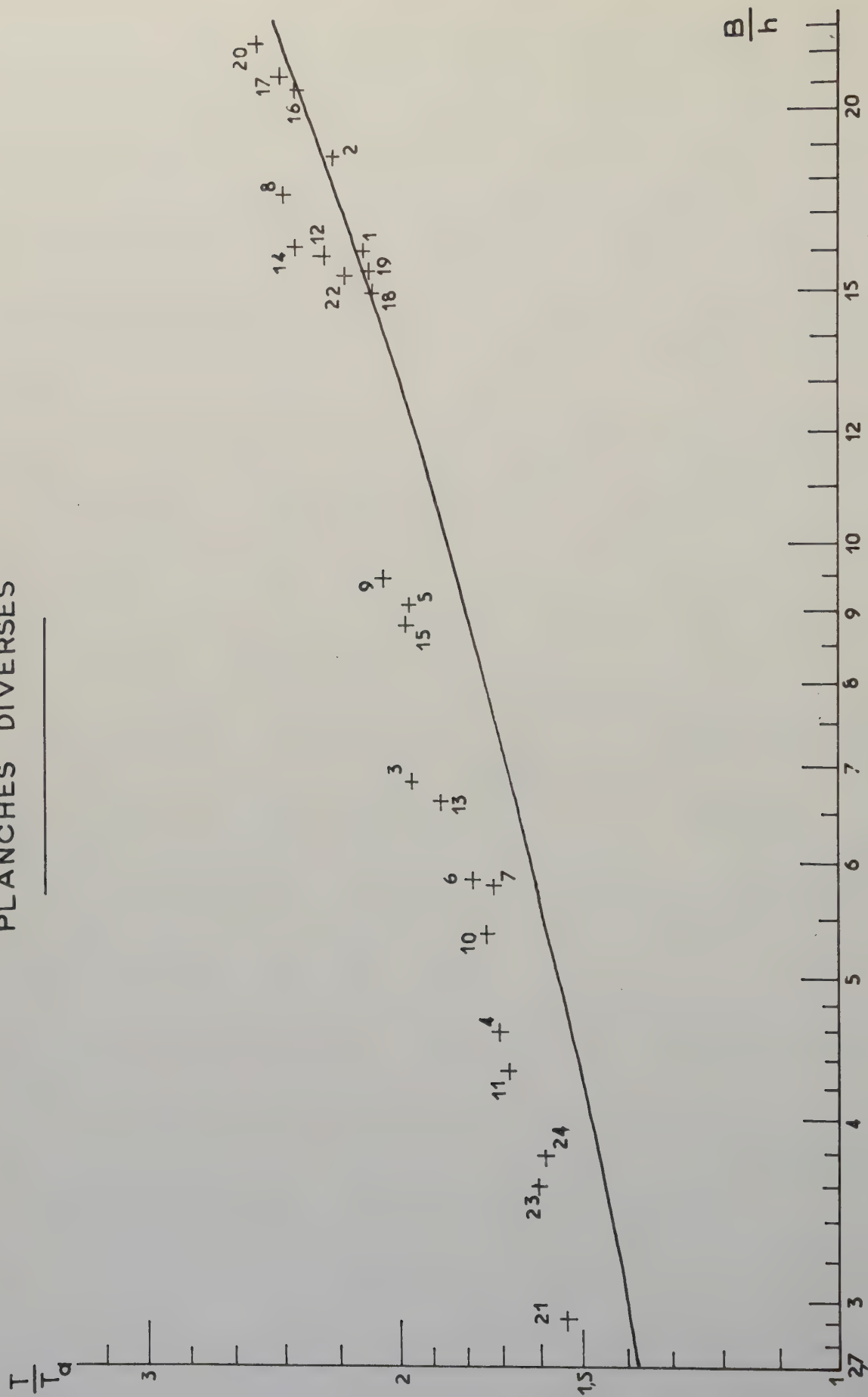
Sur ce graphique les points expérimentaux restent au voisinage de la courbe théorique. Ils sont en général au-dessus mais quelques-uns sont cependant très légèrement au-dessous de cette courbe.

Tableau 5

Planches diverses

$n^{\circ s}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
L_m	4	3,6	3,15	3,07	2,98	2,99	2,50	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	1,4	2,0	1,30	1,0	1,0	0,8	1	3,06	3,15	2,1	2
B_{cm}	20	20	34	20,02	20,08	12,84	12,84	20	20	20	20	16,89	14,11	20	8,0	20	20	20	20	20	12,66	34	11,58	3,5
H_{mm}	30,3	20	54	56,0	28,4	28,3	28,3	14,5	28	41,4	56,5	13,9	28,2	20	20	20	20	20	30	20	55,9	28	41,4	20
h_{mm}	12,72	10,75	49,7	43,95	22,22	22,00	22,05	11,30	21,1	37,40	43,3	10,60	21,30	8,67	9,09	9,64	9,50	13,40	12,80	9	43,45	22,08	32,38	9,30
$\frac{B}{h}$	15,70	18,62	6,85	4,56	9,04	5,84	5,82	17,50	9,42	5,35	4,62	15,94	6,63	16,13	8,80	20,76	21,09	14,97	15,63	22,23	2,92	15,36	3,58	3,77
$T_a \text{ ms}$	138,0	118,8	47,9	45,26	74,0	83,4	61,3	89,3	41,0	31,5	19,17	82,5	41,60	39,5	39,80	17,35	10,30	9,25	5,82	13,16	44,10	84,1	29,96	42,2
T_{ms}	297,0	267,5	94,6	78,0	149,6	149,8	107,0	200,2	85,3	55,8	32,5	188,5	79,4	94,8	79,85	41,8	25,44	19,80	12,38	33,86	68,14	203,2	48,26	67,4
$\frac{T}{T_a}$	2,15	2,25	1,97	1,72	2,02	1,79	1,74	2,24	2,08	1,76	1,69	2,28	1,90	2,40	2,01	2,41	2,47	2,14	2,13	2,57	1,54	2,42	1,61	1,59
$\sqrt{\frac{J}{\pi \cdot r^3}}$	2,15	2,27	1,70	1,55	1,83	1,63	1,63	2,23	1,85	1,60	1,55	2,17	1,68	2,17	1,82	2,37	2,38	2,12	2,15	2,43	1,42	2,11	1,47	1,49
$\Delta \%$	0	+0,9	-13,4	-9,9	-9,4	-8,9	-6,3	-0,4	-10,5	-9,0	-8,2	-4,8	-11,5	-9,5	-9,4	-1,5	-3,7	-0,9	+0,9	-5,4	-7,7	-11,5	-8,6	-6,2

PLANCHES DIVERSES



6. EXTENSION A DES POUTRES FLOTTANTES DE GRANDES DIMENSIONS

61. LES POUTRES

Nous nous proposons maintenant d'étendre notre expérimentation à des poutres beaucoup plus grandes. Nous cherchons si on retrouve le même bon accord entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques pour des poutres réalisées à une bien plus grande échelle.

Pour cela, nos expériences ont porté d'une part sur un caisson et d'autre part sur une péniche flottant l'un et l'autre sur la Loire. La péniche, en particulier a une longueur de 21 m, une largeur de 4 m et une hauteur de 1,3 m (et une masse à vide de 15 000 kg).

Cependant, nous n'avons plus ici la possibilité de sortir nos "poutres" de leur élément liquide pour les faire reposer sur des appuis terrestres et mesurer directement leurs périodes de résonance dans l'air. Pour tester la validité dans ce cas de l'expression proposée, nous avons donc dû nous limiter à une action sur le seul paramètre restant accessible : l'immersion. Pour cela il suffisait en effet de répartir sur la poutre vibrante une charge connue variable. Pour la péniche en particulier, nous avons réparti jusqu'à 18.800 kg, faisant ainsi varier son immersion de 29 à 67 cm.

Nous avons relevé les périodes de résonance pour différentes charges, et comparé leurs variations en fonction de l'enfoncement, aux variations correspondantes prévues par la loi théorique.

Nous rendons compte ici de ces mesures et des résultats obtenus.

62. OBTENTION DES VIBRATIONS

La péniche et le caisson dont nous voulons mesurer les périodes de résonance en flexion plane verticale sont des structures de grandes dimensions et d'inertie importante, ayant un amortissement notable.

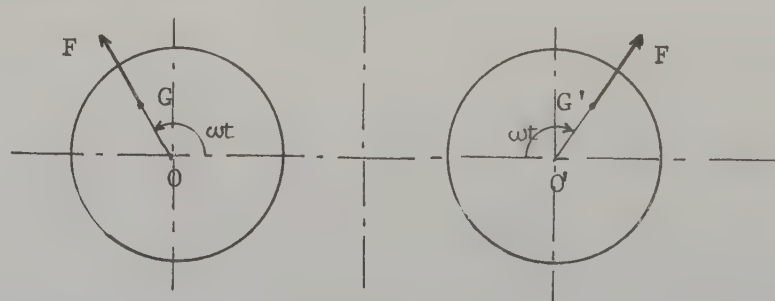
Pour les mettre en vibration, nous utiliserons, comme dans le cas des poutres de dimensions réduites, deux générateurs en phase, placés chacun à une extrémité. Mais ces générateurs devront exercer sur la poutre une force alternative suffisamment grande pour que les vibrations obtenues soient nettement appréciables. De plus, bien sûr, ces générateurs doivent :

- être identiques,
- être synchronisés en vitesse,
- être synchronisés en phase.

Les deux générateurs de vibrations que nous avons utilisés, répondant à ces impératifs, ont été mis au point au Laboratoire de Vibrations-Dynamique des structures de l'E.N.S.M.

Chacun de ces générateurs est constitué par deux disques identiques montés sur des axes horizontaux, parallèles et de même niveau, entraînés en rotation à la même vitesse, mais en sens opposés.

Les deux disques portent des balourds identiques placés symétriquement par rapport au plan de symétrie vertical de l'ensemble des disques. Chaque balourd utilisé ici a une masse de 1,5 kg et son centre d'inertie est situé à 82 mm de l'axe.



Quand ils sont entraînés avec une vitesse de rotation ω les deux

disques exercent ainsi sur la structure qui les supporte des actions dont les composantes horizontales s'opposent et dont les composantes verticales s'ajoutent, soit :

$$F = 2 m \omega^2 r \sin \omega t$$

(avec ici $m = 1,5 \text{ kg}$ et $r = 0,082 \text{ m}$)

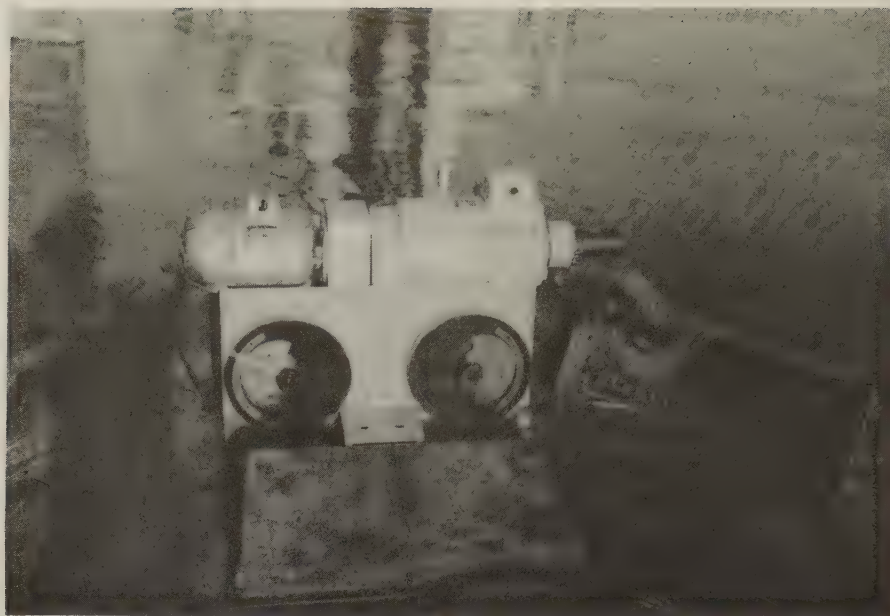
L'entraînement des deux disques d'un générateur est réalisé par un moteur électrique à courant continu dont on fait varier la vitesse par action sur l'induit. Le moteur utilisé est un moteur Leroy, type C 132, à excitation séparée, d'une puissance de 1,9 kW.

La synchronisation en vitesse des moteurs d'entraînement des deux générateurs est réalisée par dynamo tachymétrique, l'un des moteurs étant asservi à l'autre. (Pour améliorer la précision une boucle de retour est toutefois réalisée avec une dynamo tachymétrique montée sur le moteur asservi et un second enroulement réalisé sur la dynamo du moteur pilote).

Enfin, la synchronisation en phase est obtenue au moyen d'un arbre électrique, constitué avec deux moteurs asynchrones à bagues, identiques. Leurs stators sont montés en parallèle sur le réseau triphasé et leurs rotors sont montés en série. Chaque rotor est relié mécaniquement à celui du moteur d'entraînement correspondant. Ainsi, le courant que produirait un décalage mécanique des rotors tendrait à les ramener au synchronisme.

Les moteurs utilisés sont des moteurs ENCO type M I L T I, d'une puissance de 1,2 kW.

Chacun de ces générateurs a été soudé sur la structure à étudier en une de ses extrémités.



UN GENERATEUR DE VIBRATION EN PLACE A UNE EXTREMITÉ DE LA PENICHE
On distingue de gauche à droite : le moteur d'arbre électrique, le
moteur d'entraînement et la dynamo tachymétrique, et au dessous les
disques avec leurs balourds.



VUE D'ENSEMBLE DE LA PENICHE AU COURS DES ESSAIS
On distingue les deux rangées inférieures de godets déjà en place

63. MESURES EFFECTUEES

Les structures étudiées ne pouvant l'être que tandis qu'elles flottent, nous mesurons leurs périodes de résonance en flexion plane verticale pour différents enfoncements. On augmente l'enfoncement en ajoutant une charge connue répartie sur la poutre.

Soient h l'immersion de la poutre, et B sa largeur. La relation que nous avons établie et que nous voulons tester ici exprime le rapport des périodes correspondantes de la poutre flottante et de la poutre libre. Elle s'exprime :

$$\frac{T}{T_a} = \sqrt{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}$$

où J , α et β sont des fonctions de la section immergée c'est-à-dire de B et h . Tous calculs numériques effectués, on a montré que pour $\frac{B}{h}$ compris entre 5 et 50 une bonne approximation de la relation précédente était donnée par la relation approchée.

$$\frac{T}{T_a} = 0,85 \left(\frac{B}{h}\right)^{1/3}$$

Comme nous restons ici dans les limites de validité de l'expression approchée, c'est celle-ci que nous retiendrons.

On sait d'autre part que :

$$T_a = \frac{8 L^2}{\pi (2p - 1)^2} \sqrt{\frac{\rho S}{E I}}$$

Quand on charge la poutre, nous admettrons que seule augmente son inertie, sa rigidité restant constante, c'est-à-dire :

$$\rho S = \rho B H = \rho' B h$$

Ainsi, pour un accroissement de la charge,

$$T_a \text{ est de la forme } T_a = k h^{1/2}$$

et par suite,

$$T \text{ est de la forme } T = k h^{1/6}$$

7. VIBRATION D'UN CAISSON METALLIQUE

71. LA POUTRE

La poutre que nous faisons vibrer est ici un caisson métallique utilisé habituellement comme ponton. Il est réalisé avec une tôle de 6 mm constituant une enveloppe de forme générale parallélépipédique.

Les dimensions extérieures sont les suivantes :

- longueur 4,70 m
- largeur 2,95 m
- hauteur 1,00 m

Toutefois le fond est relevé aux deux extrémités et ses bords sont raccordés par un arrondi aux flancs latéraux. Enfin, 4 cadres transversaux en cornière L 60 renforcent la structure et assurent sa rigidité.

Le poids total à vide est de 2000 kg.

72. RESULTATS

Nous donnons directement, pour chaque charge l'immersion h en cm et la fréquence de résonance mesurée N , en tours par minute.

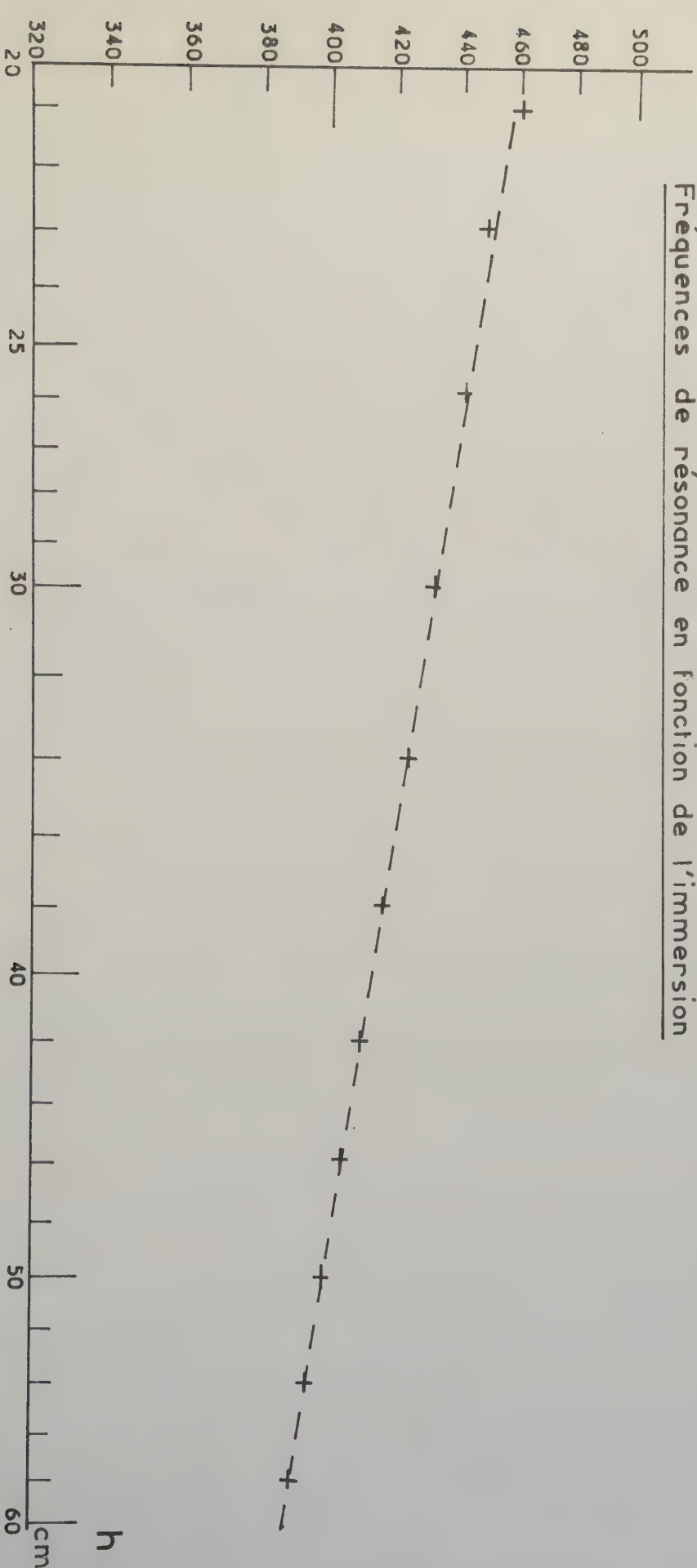
h cm	N tours/mn
21	460
23	451
26	442
30	434
34	425
38	418
42	410
46	404
50	399
54	394
58	391

CAISSON FLOTTANT

Tours par
minute

(Longueur 4,7 m - masse variant de 2 à 4,6 t)

Fréquences de résonance en fonction de l'immersion



8. VIBRATIONS D'UNE PENICHE

81. LA POUTRE

La poutre étudiée ici est une péniche des Ponts et Chaussées d'un poids à vide de 15 tonnes et d'un volume utile de 78 m^3 .

Cette péniche, dépourvue de tout appareil propulsif a une structure particulièrement simple permettant de l'assimiler très sensiblement à une poutre de section en U constante. Cette péniche est en effet simplement une enveloppe parallélépipédique ouverte constituée par une tôle de 6 mm, renforcée tous les 50 cm par un cadre constitué sur le fond par un profilé I.100 et sur les flancs par une cornière L.60. Les flancs plats et verticaux, et le fond plat et horizontal sont raccordés par un arrondi de 8 cm. Les extrémités de la péniche sont arrondies, mais la diminution de section ne commence qu'à 2,5 m de l'extrémité.

Les dimensions sont les suivantes :

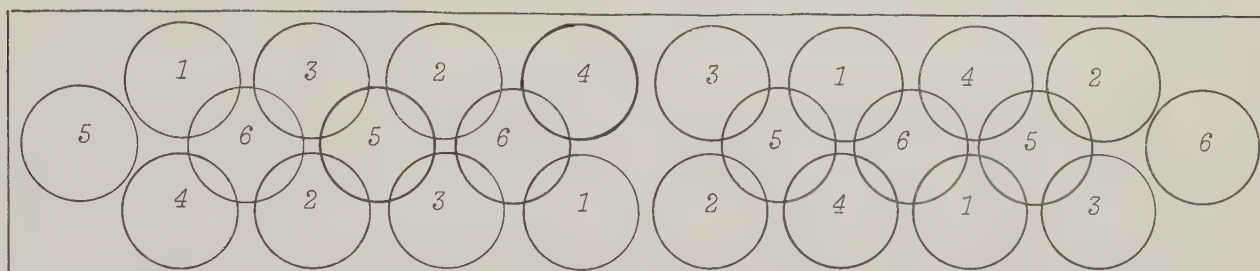
- longueur 21 m
- largeur 4,10 m
- hauteur 1,28 m
- immersion à vide 26 cm

82. VARIATION DE L'IMMERSION

Il faut d'abord noter que divers accessoires, les générateurs de vibration et un peu d'eau stagnant entre le fond et le plancher en bois de la péniche accroissent la charge initiale et nous font évaluer l'immersion initiale à 29 cm.

L'accroissement de l'immersion est obtenu ici en chargeant la péniche avec des godets de drague d'un poids unitaire de 1.200 kg. Ces godets d'un diamètre de 1,80 m peuvent être alignés par deux sur le fond de la péniche et une rangée supplémentaire peut être déposée sur les précédentes. On a ainsi utilisé 24 godets, d'un poids total de 28,8 tonnes.

Pour que ces charges puissent être assimilées à une charge régulièrement répartie, on a effectué des mesures après chaque dépôt d'un groupe de 4 godets, chaque groupe correspondant à un repère du schéma suivant :



L'enfoncement pour chaque groupe de 4 godets est alors sensiblement de 6,2 cm

83. RESULTATS

On donne pour chaque mesure effectuée, successivement le repère, le nombre de godets n , la masse totale M en tonnes, l'immersion h en cm et la fréquence fondamentale de résonance N en tours par minute :

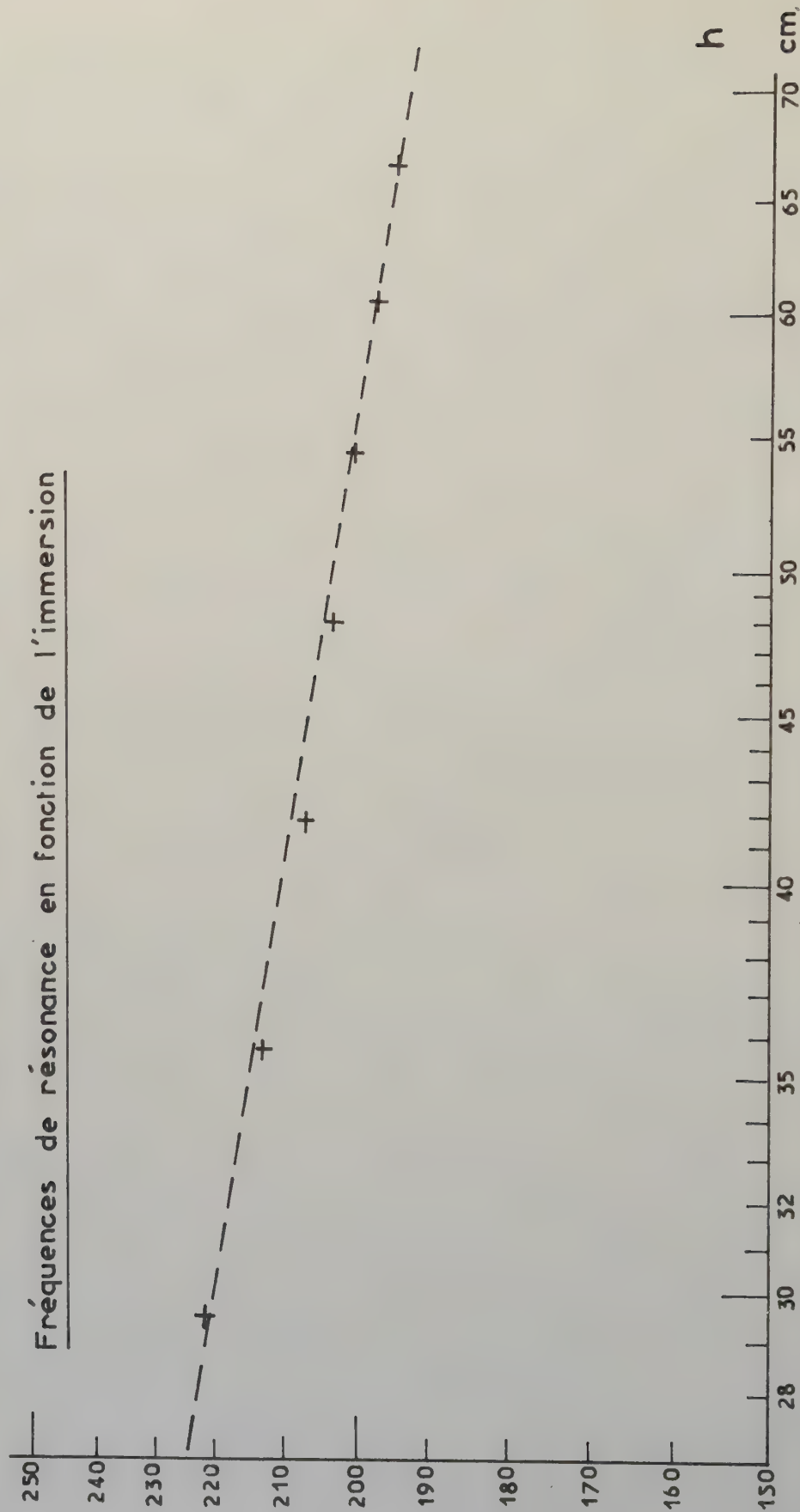
n°	n	M	h	N
0	0	17,7	29,5	222
1	4	22,5	35,7	212
2	8	27,3	41,9	207
3	12	32,1	48,1	203
4	16	36,9	54,3	200
5	20	41,7	60,5	197
6	24	46,5	66,7	195

PENICHE

(Longueur 21 m - masse variant de 17,7 t à 46,5 t)

Tours par
minute

Fréquences de résonance en fonction de l'immersion



9. CONCLUSION

Les différentes séries de mesures que nous avons effectuées et dont nous venons de rendre compte donnent des résultats en parfait accord avec la forme de la relation théorique que nous avons précédemment établie pour exprimer le rapport des périodes naturelles de vibration d'une poutre droite homogène, de section rectangulaire constante flottant à la surface d'un liquide.

Cependant, si la forme de cette expression convient, nous avons noté que les rapports expérimentaux sont en général supérieurs aux rapports théoriques.

Ces écarts systématiques sont évidemment dus aux écarts entre les conditions réelles et les conditions théoriques envisagées pour l'établissement de l'expression. Leur importance relative est ainsi évaluée.

Nous avons pu constater aussi que cette expression convient, sensiblement de la même manière dans le cas de poutres de très grandes dimensions. Bien que n'ayant pas eu la possibilité de mesurer les périodes naturelles de ces poutres hors de l'eau, nous avons en effet pu constater que la variation avec l'immersion des périodes de résonance de ces poutres était très sensiblement conforme à nos prévisions, et ceci pour des immersions variant dans le rapport de 1 à 2,5.

Nous avons donc vérifié expérimentalement que l'expression que nous avons établie dans des conditions idéales, permet néanmoins de réaliser une bonne première approximation dans des conditions réelles. Les écarts évalués ici peuvent enfin permettre d'obtenir une bonne prévision des périodes réelles de vibration. Enfin, ces résultats peuvent être étendus aux poutres flottantes de grandes dimensions.

CHAPITRE IV

-:~::~:-

POUTRES TRIANGULAIRES

-:~::~:-

SOMMAIRE

=====

1. INTRODUCTION

2. ECOULEMENT AUTOUR DE LA POUTRE FLOTTANTE

- 21. Hypothèse. Notations
- 22. Transformation conforme
- 23. Potentiel complexe de l'écoulement

3. MOUVEMENT DE LA POUTRE FLOTTANTE

- 31. Action du liquide sur la poutre
- 32. Résultante
- 33. Equation du mouvement de la poutre
- 34. Périodes de vibrations

4. CALCULS NUMERIQUES

- 41. Coefficient de forme $C(\alpha)$
Valeurs numériques de C . Courbe de variations
- 42. Intégrale double J .
Différents cas. Courbe de variations
- 43. Valeurs numériques calculées du rapport $\frac{T}{T_a}$
- 44. Courbe de variations en coordonnées semi-logarithmiques

5. VERIFICATION EXPERIMENTALE

- 51. Variation de la forme de la section
- 52. Variation de la grandeur de la section immergée

6. CONCLUSION

I. INTRODUCTION

Une cause d'écarts entre les conditions réelles et les conditions théoriques envisagées est, pour la section rectangulaire, la présence des angles vifs du contour immergé, autour desquels peuvent se produire des décollements.

Nous nous proposons d'étudier ici un cas pour lequel il n'y a pas à craindre de décollements, comme dans le cas précédent, celui d'un profil triangulaire, pour lequel le point anguleux est cette fois un point stagnant.

Comme on étudie ici les vibrations de la poutre en flexion plane verticale, nous nous limiterons au cas d'un profil triangulaire immergé symétrique, pour lequel les actions du liquide sur la poutre sont également symétriques.

Nous mènerons cette étude suivant la même méthode que dans le cas de la poutre rectangulaire. Puis, comme dans ce cas également, nous effectuerons des essais expérimentaux et nous comparerons les résultats de ces mesures à ceux prévus par le calcul.

La détermination de l'action du liquide sur la poutre conduit à des intégrales qui ne peuvent être effectivement calculées qu'à la machine. Ces calculs ont été effectués par le Centre de Calcul Automatique de l'E.N.S.M. pour différentes formes de profils triangulaires isocèles ce qui a permis de construire les courbes de variations et de donner des résultats théoriques numériques.

2. ECOULEMENT AUTOUR DE LA POUTRE FLOTTANTE

21. HYPOTHESES. NOTATIONS

Pour étudier l'écoulement du liquide autour de la poutre flottante de section triangulaire immergée isocèle, nous formons les mêmes hypothèses que dans le cas de la poutre de section rectangulaire, à savoir :

- la poutre vibre en flexion plane verticale dans son plan de symétrie longitudinal,
- ses vibrations sont harmoniques, de pulsation ω ,
- elle est suffisamment longue pour que l'on puisse admettre que l'écoulement est bi-dimensionnel (s'effectuant dans des plans de section droite),
- le liquide entourant la poutre est parfait.

Nous noterons :

- 2α : angle au sommet de la section de la poutre,
- h : hauteur immergée de la poutre,
- B : largeur de la poutre à la flottaison,
- S : section droite de la poutre,
- S' : section immergée,
- I : moment d'inertie de la section par rapport à son axe neutre en flexion plane verticale,
- E : module d' élasticité longitudinale du matériau constituant la poutre,
- ρ : masse volumique de la poutre,
- ρ' : masse volumique du liquide.

Soit z un plan de section droite de la poutre, lié à la poutre. O étant le sommet de la section immergée dans le plan z , nous rapportons ce plan aux axes Ox horizontal, et Oy vertical ascendant (axe de symétrie de la section).

On étudie l'écoulement du liquide dans le plan z par rapport à la poutre.

22. TRANSFORMATION CONFORME

Soit ABOCD le contour polygonal constitué dans le plan z par les traces de la surface libre du liquide et de la surface extérieure de la poutre immergée. Pour étudier l'écoulement du liquide autour de la poutre dans le plan z , on effectue une transformation conforme du plan z sur un plan Z telle qu'au contour précédent corresponde l'axe réel du plan Z , et qu'à la région occupée dans z par le liquide corresponde le demi-plan $Y \geq 0$.

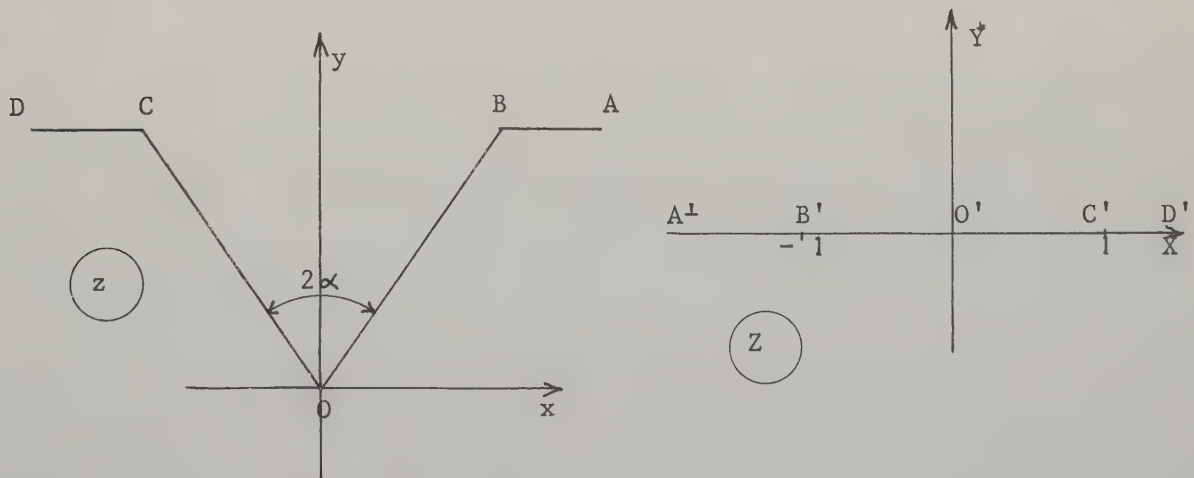
Soient O' , B' et C' les points correspondants dans Z respectivement à O , B et C . Quand on suit l'axe réel du plan Z de $-\infty$ à $+\infty$ $\frac{dz}{dZ}$ doit donc avoir pour argument successivement :

sur $A'B'$: π , sur $B'O'$: $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, sur $O'C'$: $\frac{\pi}{2} + \alpha$ et sur $C'D'$: π

La transformation conforme envisagée est donc la transformation de Schwarz :

$$\frac{dz}{dZ} = -A (Z-Z_B)^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} (Z-Z_O)^1 - \frac{2\alpha}{\pi} (Z-Z_C)^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}}$$

où A est une constante réelle positive.



Pour conserver la symétrie on prendra pour O' , B' et C' respectivement les points d'affixes 0 , -1 et $+1$.

On posera d'autre part :

$$m = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi}$$

La transformation considérée s'écrit ainsi :

$$\frac{dz}{dZ} = -A \left(\frac{Z^2}{Z^2 - 1} \right)^m$$

La constante A est déterminée par les conditions aux limites, c'est-à-dire en appliquant la transformation entre B' et O' (ou entre O' et C').

On aura ainsi, par exemple entre O' et C' , c'est-à-dire en faisant :

$$Z = X \quad \text{et} \quad 0 \leq X \leq 1$$

$$dz = -A \left(\frac{X^2}{1 - X^2} \right)^m \exp(-i m \pi) dX$$

$$\text{avec } dz = dx + i dy$$

$$\text{et } \exp(-i m \pi) = \sin \alpha - i \cos \alpha$$

$$\text{d'où } dy = A \cos \alpha \left(\frac{X^2}{1 - X^2} \right)^m dX$$

et en intégrant de O' à C'

$$h = A \cos \alpha C(\alpha)$$

$$\text{avec } C(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{X^2}{1 - X^2} \right)^m dX$$

Ainsi la forme de la section triangulaire isocèle peut être caractérisée par son angle 2α , ou par le paramètre sans dimension m (variable de 0 à 1/2) ou encore par le paramètre $C(\alpha)$ (ce paramètre est d'ailleurs calculable en fonction de α au moyen des fonctions eulériennes)

Quant à la grandeur de la section immergée, elle peut être caractérisée par l'immersion h ou par le paramètre A .

23. POTENTIEL COMPLEXE DE L'ÉCOULEMENT

Nous avons admis que l'écoulement autour de la poutre flottante pouvait être considéré comme plan, et s'effectuant dans les plans de section droite de la poutre, z .

Nous avons admis que le liquide entourant la poutre était parfait. Comme l'écoulement s'établit à partir d'un état d'équilibre initial, l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel. Soit alors $\mathcal{F}(z,t)$ le potentiel des vitesses de cet écoulement.

Nous avons enfin admis que les vibrations de la poutre étaient harmoniques, de pulsation ω .

Nous écrirons donc le potentiel complexe sous la forme :

$$\mathcal{F}(z,t) = f(z) \cos \omega t$$

$f(z)$ étant déterminé par les conditions aux limites.

Comme conditions aux limites, il reste à traduire, dans la transformation conforme envisagée, les conditions de surface libre. Nous le ferons en considérant une répartition appropriée de sources placées sur l'image de la surface libre dans le plan Z , c'est-à-dire sur la partie de son axe réel telle que $|X| > 1$.

De la même façon que dans le cas de la section rectangulaire, nous admettrons encore que dans le plan z considéré, le déplacement vertical de la trace de la surface libre est, à un instant donné, indépendant du point de cette surface. Rappelons que cette hypothèse correspond à des déformations cylindriques de la surface libre, de génératrice normale à la poutre, ce que l'on observe expérimentalement.

La vitesse du liquide en un point de la surface libre est ainsi, par rapport à la poutre $v \cos \omega t$, avec v constant dans chaque plan z de section droite.

Dans ces conditions, si $u - iv$ est la vitesse complexe d'un point de la surface libre, la vitesse complexe de son image (point P d'abscisse s avec $|s| > 1$ sur l'axe réel de Z sera :

$$W(s) = U - iV = \frac{df}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} = -A \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right)^m (u - iv)$$

$$\text{d'où : } V(s) = -A v \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right)^m$$

Pour que la composante imaginaire $V(s)$ de la vitesse complexe des points P de l'axe réel du plan Z ait cette valeur, il faut placer le long de cet axe un tapis de sources débitant dans le demi-plan $Y > 0$ et de densité

$$\mu(s) = V(s)$$

Dans ces conditions, en un point M du plan Z , d'affixe Z , la vitesse complexe induite par ces sources sera :

$$W(Z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{ds}{Z - s} + \frac{1}{\pi} \int_{+1}^{+\infty} \frac{V(s) ds}{Z - s}$$

Etant donnée la symétrie, on a : $V(s) = V(-s)$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{-1} \frac{V(s) ds}{Z - s} = \int_{+\infty}^{+1} \frac{V(-s) d(-s)}{Z - (-s)} = \int_{+1}^{+\infty} \frac{V(s) ds}{Z + s}$$

$$\text{Donc, } W(Z) = \frac{1}{\pi} \int_{+1}^{+\infty} \left[\frac{V(s)}{Z - s} + \frac{V(s)}{Z + s} \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_{+1}^{+\infty} \frac{2 V(s) Z ds}{Z^2 - s^2}$$

et en explicitant $V(s)$, avec v constant :

$$W(Z) = -\frac{2 A v Z}{\pi} \int_1^{\infty} \left(\frac{s^2}{-1 + s^2} \right)^m \frac{ds}{Z^2 - s^2}$$

On en déduit le potentiel complexe en intégrant cette expression considérée comme une fonction de la variable complexe Z :

$$f(Z) = -\frac{A v}{\pi} \int_1^{\infty} \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right)^m \ln \frac{Z^2 - s^2}{s^2} ds$$

$$\text{et } \mathcal{F}(Z, t) = f(Z) \cos \omega t$$

3. MOUVEMENT DE LA POUTRE FLOTTANTE

31. ACTION DU LIQUIDE SUR LA POUTRE

Dans l'écoulement du liquide autour de la poutre les deux demi-contours OB et OC sont des lignes de courant, le long desquelles nous appliquerons le théorème de Bernoulli :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + U + \frac{P}{\rho'} + \frac{V^2}{2} = K(t)$$

équation dans laquelle :

- $\mathcal{F}$ est le potentiel complexe précédemment calculé (auquel s'identifie le potentiel des vitesses puisqu'il s'agit d'une ligne de courant)

- U est le potentiel dont dérivent les forces de masse dont le liquide est le siège, à savoir :

forces de pesanteur dérivant du potentiel $g y$

forces d'inertie d'entraînement (puisque'on étudie le mouvement du liquide par rapport à la poutre animée d'un mouvement de translation), dérivant du potentiel $\eta'' y$

Donc $U = (g + \eta'') y$

- p est la pression au point considéré

- V est la vitesse

Nous négligerons d'ailleurs ce terme $\frac{V^2}{2}$ c'est-à-dire que nous admettons que les vitesses restent suffisamment petites pour que leurs carrés soient négligeables devant les autres termes de l'équation.

On a ainsi :

- en un point quelconque de OC, dont l'image dans Z a pour affixe X ($|X| > 1$) :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{A v}{\pi} \sin \omega t \int_1^\infty \left(\frac{s^2}{1+s^2} \right)^m \ln \frac{s^2 - X^2}{s^2} ds$$

$$U = (g + \eta'') y$$

$$p = p$$

- au point C sur la surface libre, dont l'image dans Z a pour affixe $+1$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{A v}{\pi} \sin \omega t \int_1^{\infty} \left(\frac{s^2}{-1 + s^2} \right)^m \ln \frac{s^2 - 1}{s^2} ds$$

$$U = (g + \gamma'') h$$

$$p = p_e \text{ (pression extérieure)}$$

En portant ces expressions dans l'équation de Bernoulli on obtient la pression au point M :

$$p = p_e + (g + \gamma'') (h - y) - \frac{A v \omega}{\pi} \sin \omega t \int_1^{\infty} \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right)^m \ln \frac{s^2 - X^2}{s^2 - 1} ds$$

On obtient la résultante des actions du liquide sur la poutre en intégrant l'expression précédente le long du contour immergé.

Etant donnée la symétrie de ce contour, les composantes horizontales s'opposent sur les deux faces, et les composantes verticales s'ajoutent.

La résultante est ainsi :

$$F = 2 \int_0^{B/2} p dx$$

où B est la largeur de la poutre au niveau de l'immersion, c'est-à-dire

$$B = 2 h \operatorname{tg} \alpha$$

On obtient :

$$F = p_e B + (g + \gamma'') \frac{h B}{2} - 2 \rho' \frac{A^2 v \omega}{\pi} \sin \alpha \sin \omega t. J$$

$$\text{avec } J = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1 - x^2} \right)^m dx \int_1^{\infty} \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right)^m \ln \frac{s^2 - X^2}{s^2 - 1} ds$$

En remarquant que :

$$\frac{\rho' h B}{2} = \rho S$$

On peut encore écrire les premiers termes :

$$p_e B : \text{pression extérieure transmise par la poutre,}$$

$$\begin{aligned} \rho g S & : \text{ poids de la poutre} \\ \rho \eta'' S & : \text{ force d'inertie d'entraînement de la poutre} \end{aligned}$$

Quant au dernier terme, nous en acheverons le calcul dans le cas particulier où on peut négliger les déformations de la surface libre. v est alors le même pour tous les plans, et on prend égal à l'opposé de la vitesse de la poutre par rapport au liquide, soit :

$$v = - \frac{\omega \eta_0}{\cos \alpha}$$

Le coefficient de J s'écrit alors : $2 A^2 \rho' \operatorname{tg} \alpha \omega^2 \eta_0 \sin \omega t$

On peut encore tenir compte des relations :

$$\eta'' = - \eta_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$$A = \frac{h}{C \cos \alpha}$$

$$B = 2 h \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\rho' B h}{2} = \rho S$$

Ainsi, le coefficient de J devient $\frac{2 \rho S \eta''}{C^2 \cos^2 \alpha}$

et la résultante des forces dans le plan Z :

$$F = p_e B + \rho S g - \rho S \eta'' \left[\frac{2 J}{\pi C^2 \cos^2 \alpha} - 1 \right]$$

33. EQUATION DU MOUVEMENT DE LA POUTRE

Nous prendrons l'équation du mouvement de la poutre sous sa forme réduite, c'est-à-dire en négligeant l'effet des forces de cisaillement ainsi que le mouvement de rotation. On l'obtient en écrivant le théorème de la résultante dynamique pour un élément de poutre de longueur ΔZ . Pour cet élément on a :

- quantité d'accélération : $\rho S \Delta Z \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$
- forces extérieures :
 - action de la pesanteur : $-\rho S g \Delta Z$
 - pression extérieure : $-p_e B \Delta Z$
 - variations de l'effort tranchant : $-EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} \Delta Z$
 - action du liquide sur la poutre :

$$p_e B + \rho S g - \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \left[\frac{2 J}{C^2 \cos^2 \alpha} - 1 \right] \Delta Z$$

D'où, toutes simplifications faites, l'équation du mouvement :

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + \frac{2 \rho S J}{C^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

34. PERIODES DE VIBRATIONS

Nous admettrons encore que les conditions aux limites pour la poutre flottante restent les mêmes que lorsqu'elle vibre suivant le même mode en étant libre. Nous admettons donc qu'aux extrémités l'effort tranchant et le moment de flexion restent nuls.

Ces conditions se traduisent, pour une pulsation ω et une déformée comportant p noeuds, par :

$$m L = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{avec } m^4 = \frac{2 \rho S J}{EI C^2 \cos^2 \alpha} \omega^2$$

La période correspondante est alors :

$$T_P = \frac{8 L^2}{\pi (2p - 1)^2} \sqrt{\frac{\rho S}{EI} \frac{2 J}{C^2 \cos^2 \alpha}}$$

On peut encore écrire le rapport des périodes correspondantes de vibration de la même poutre, vibrant suivant un même mode, quand elle est

libre (T_a) et quand elle flotte (T) :

$$\frac{T}{T_a} = \frac{1}{C \cos \alpha} \sqrt{\frac{2J}{\pi}}$$

avec $C = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m dx$

$$J = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m dx \int_1^\infty \left(\frac{s^2}{s^2-1} \right)^m \ln \frac{s^2-x^2}{s^2-1} ds$$

et $m = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi}$

4. CALCULS NUMERIQUES

41. COEFFICIENT DE FORME C (α)

C (α) est une intégrale eulérienne de première espèce.

En effet, par définition on a posé :

$$C = \int_0^1 \left(\frac{X^2}{1 - X^2} \right)^m dX \quad (\text{avec } m = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi})$$

$$\text{Donc, } C = \int_0^1 X^{2(m-1/2)} (1 - X^2)^{-m} X dX$$

Et , en posant $X^2 = u$

et d'autre part $m - \frac{1}{2} = p - 1$ et $-m = q - 1$

$$C = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{q-1} du$$

c'est à dire

$$C(\alpha) = \frac{1}{2} B(p, q)$$

$$\text{et comme } B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$$

On aura pour C(α) :

$$C(\alpha) = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(1 - m)}{2 \Gamma(\frac{3}{2})}$$

La fonction est tabulée pour p variant de 1 à 2 alors que $m + \frac{1}{2}$ et $1 - m$ varient de $\frac{1}{2}$ à 1. On se ramène donc à l'intervalle (1,2) en utilisant la relation :

$$\Gamma(p + 1) = p \Gamma(p)$$

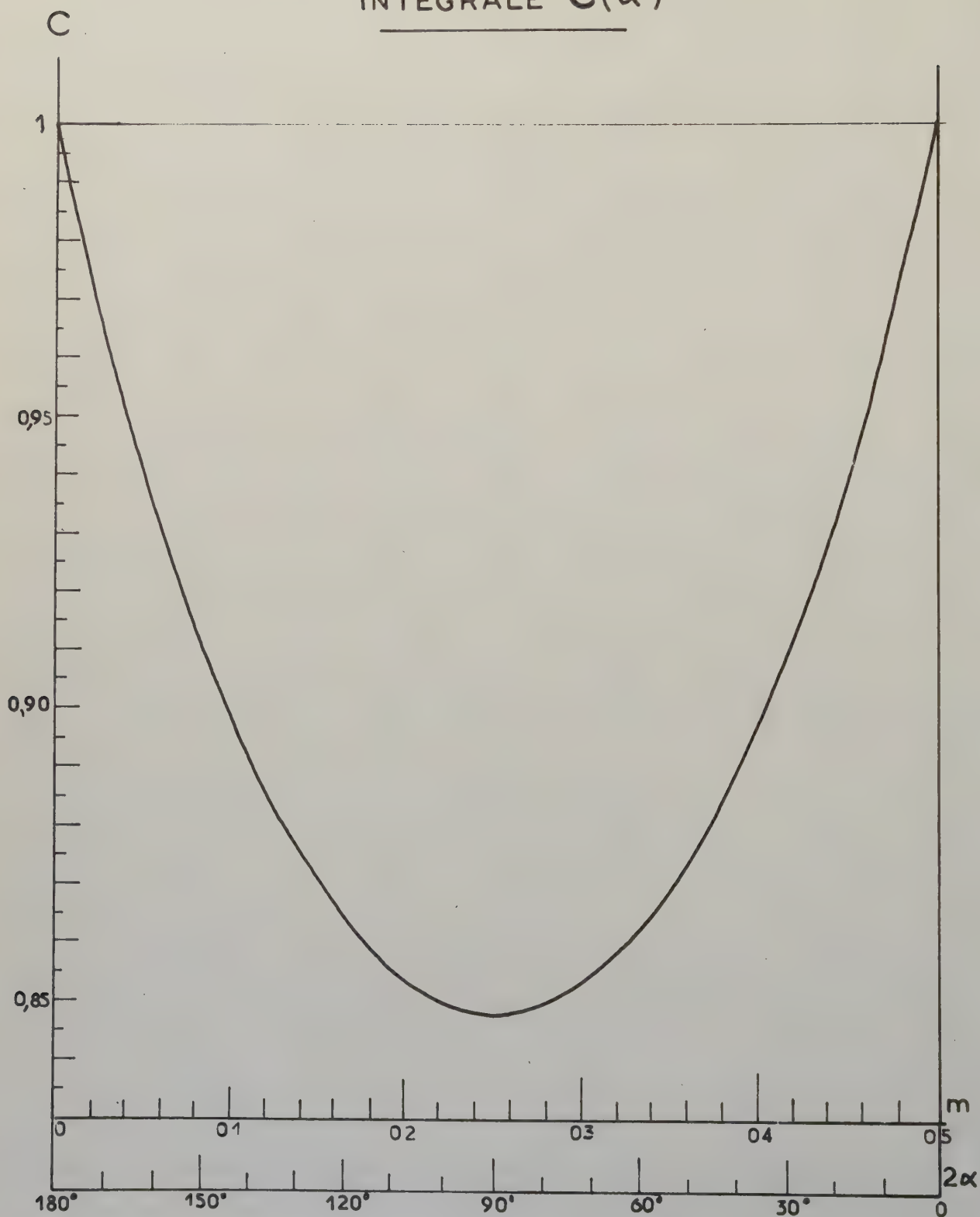
D'où finalement :

$$C = \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2}) \Gamma(2 - m)}{2(m + \frac{1}{2}) \cdot (1 - m) \Gamma(\frac{3}{2})}$$

Valeurs numériques de C -

m	$m + \frac{1}{2}$	$m + \frac{3}{2}$	$\Gamma(m + \frac{3}{2})$	C	$\Gamma(2 - m)$	2 - m	1 - m	$\frac{1}{2} - m$
0	0,50	1,50	0,8862	1	1	2	1	0,50
0,01	0,51	1,51	0,8866	0,9866	0,9958	1,99	0,99	0,49
0,02	0,52	1,52	0,8870	0,9739	0,9917	1,98	0,98	0,48
0,03	0,53	1,53	0,8876	0,9621	0,9877	1,97	0,97	0,47
0,04	0,54	1,54	0,8882	0,9509	0,9837	1,96	0,96	0,46
0,05	0,55	1,55	0,8889	0,9406	0,9799	1,95	0,95	0,45
0,06	0,56	1,56	0,8896	0,9307	0,9761	1,94	0,94	0,44
0,07	0,57	1,57	0,8905	0,9216	0,9724	1,93	0,93	0,43
0,08	0,58	1,58	0,8914	0,9131	0,9688	1,92	0,92	0,42
0,09	0,59	1,59	0,8924	0,9049	0,9652	1,91	0,91	0,41
0,10	0,60	1,60	0,8935	0,8979	0,9618	1,90	0,90	0,40
0,11	0,61	1,61	0,8947	0,8910	0,9584	1,89	0,89	0,39
0,12	0,62	1,62	0,8959	0,8849	0,9551	1,88	0,88	0,38
0,13	0,63	1,63	0,8972	0,8790	0,9518	1,87	0,87	0,37
0,14	0,64	1,64	0,8986	0,8739	0,9487	1,86	0,86	0,36
0,15	0,65	1,65	0,9001	0,8692	0,9456	1,85	0,85	0,35
0,16	0,66	1,66	0,9017	0,8650	0,9426	1,84	0,84	0,34
0,17	0,67	1,67	0,9033	0,8612	0,9397	1,83	0,83	0,33
0,18	0,68	1,68	0,9050	0,8579	0,9368	1,82	0,82	0,32
0,19	0,69	1,69	0,9068	0,8551	0,9341	1,81	0,81	0,31
0,20	0,70	1,70	0,9086	0,8526	0,9314	1,80	0,80	0,30
0,21	0,71	1,71	0,9106	0,8507	0,9288	1,79	0,79	0,29
0,22	0,72	1,72	0,9126	0,8493	0,9262	1,78	0,78	0,28
0,23	0,73	1,73	0,9147	0,8482	0,9238	1,77	0,77	0,27
0,24	0,74	1,74	0,9168	0,8475	0,9214	1,76	0,76	0,26
0,25	0,75	1,75	0,9191	0,8473	0,9191	1,75	0,75	0,25
$\frac{1}{2} - m$	1 - m	2 - m	$\Gamma(2 - m)$	C	$\Gamma(m + \frac{3}{2})$	$m + \frac{3}{2}$	$m + \frac{1}{2}$	m

INTEGRALE $C(\alpha)$



42. INTEGRALE DOUBLE J

$$J(m) = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m dx \int_1^\infty \left(\frac{s^2}{s^2-1} \right)^m \ln \frac{s^2-x^2}{s^2-1} ds$$

Pour m variante 0 à $\frac{1}{2}$ (2α variant de π à 0), l'intégrale double J ne peut être calculée qu'à la machine.

J peut toutefois être calculé directement dans les cas limites : $m = 0$ et $m = \frac{1}{2}$

a) Cas de $m = 0$

L'intégrale se réduit à :

$$J(0) = \int_0^1 dx \int_1^\infty \ln \frac{s^2-x^2}{s^2-1} ds$$

$$\text{avec } \int \ln \frac{s^2-x^2}{s^2-1} ds = s \ln \frac{s^2-x^2}{s^2-1} - \int \frac{2(x^2-1)s^2 ds}{(s^2-x^2)(s^2-1)}$$

Cette dernière intégrale s'écrit encore :

$$\int \left(\frac{x}{s-x} - \frac{x}{s+x} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right) ds = x \ln \frac{s-x}{s+x} - \ln \frac{s-1}{s+1}$$

donc :

$$\int_1^\infty \ln \frac{s^2-x^2}{s^2-1} ds = -\ln(1-x^2) + x \ln \frac{1-x}{1+x} + 2 \ln 2$$

et :

$$J(0) = \int_0^1 \left[-(1-x) \ln(1-x) - (1+x) \ln(1+x) + 2 \ln 2 \right] dx$$

On intègre en tenant compte de $\int u \ln u du = \frac{u^2}{2} \ln u - \frac{u^2}{4}$

$$J(0) = \left[\frac{(1-x)^2}{2} \ln(1-x) - \frac{(1-x)^2}{4} - \frac{(1+x)^2}{2} \ln(1+x) + \frac{(1+x)^2}{4} + 2x \ln 2 \right]_0^1$$

Toutes réductions faites il vient donc :

$$J(0) = 1$$

b) Cas de $m = \frac{1}{2}$

L'intégrale devient dans ce cas particulier :

$$J(1/2) = \int_0^1 \frac{X dX}{\sqrt{1-X^2}} \int_1^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2-1}} \ln \frac{s^2-X^2}{s^2-1} ds$$

soit $A = \int_1^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2-1}} \ln \frac{s^2-X^2}{s^2-1} ds$

Posons $s = \operatorname{ch} \varphi$

Il vient $A = \int_0^\infty \ln \frac{\operatorname{ch}^2 \varphi - X^2}{\operatorname{sh}^2} \operatorname{ch} \varphi d\varphi$

Posons $\operatorname{sh} \varphi = u$

Il vient $A = \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{1-X^2}{u^2} \right) du$

D'où en intégrant :

$$A = \left[u \ln \left(1 + \frac{1-X^2}{u^2} \right) \right]_0^\infty + 2(1-X^2) \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1-X^2}$$

$$A = 2 \sqrt{1-X^2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{1-X^2}} \Big|_0^\infty = \pi \sqrt{1-X^2}$$

et finalement :

$$J(1/2) = \int_0^1 \pi X dX$$

$$J(1/2) = \frac{\pi}{2}$$

c) Cas général

L'intégrale J a été calculée à la machine par le Centre de Calcul Scientifique de l'E.N.S.M.

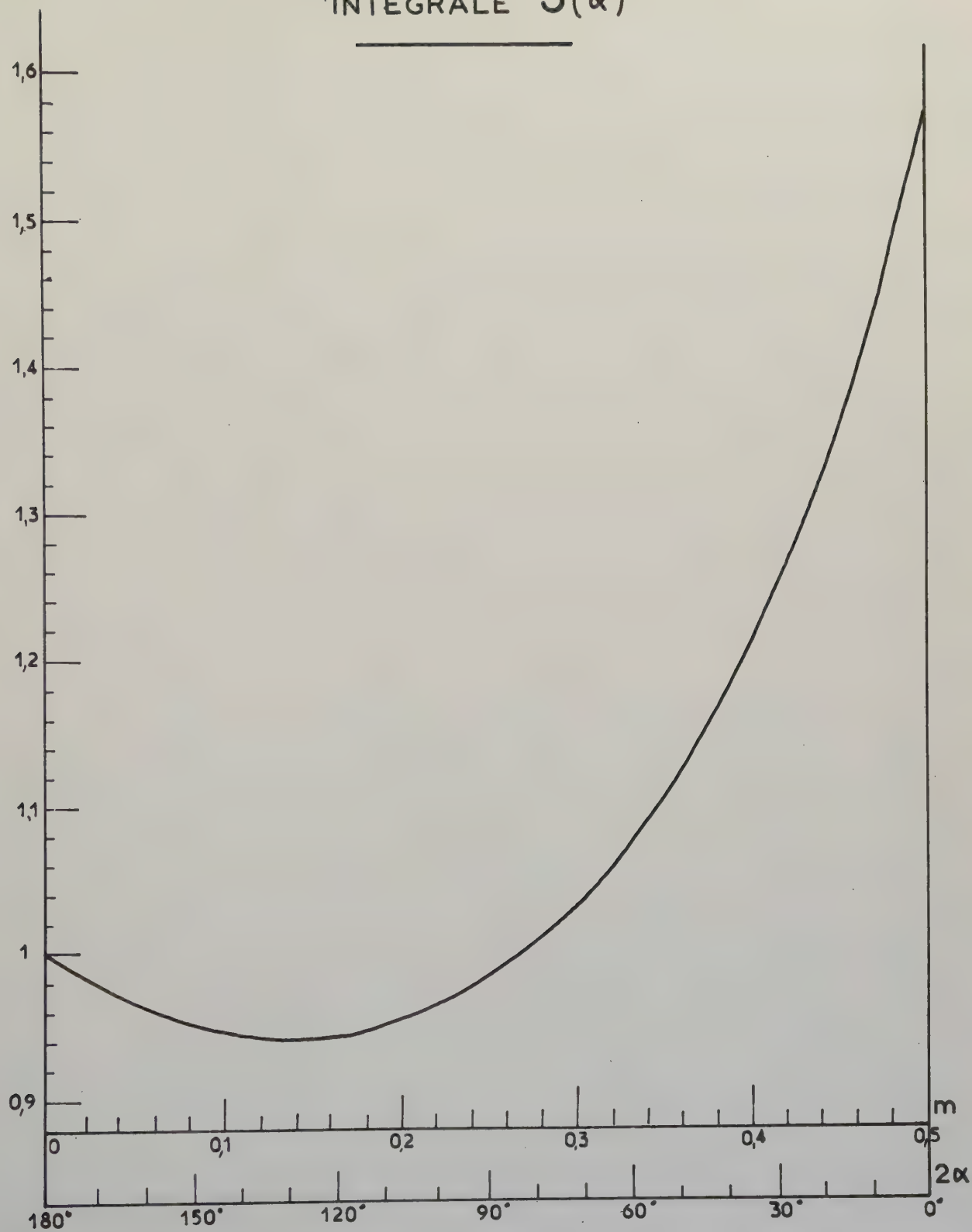
Il faut toutefois noter que les valeurs obtenues sont 0,9643 pour $J(0)$, soit une erreur de 3,57 % et 1,4972 pour $J(1/2)$ soit une erreur de 4,67 %.

Nous admettrons que cette erreur varie régulièrement entre ces deux valeurs extrêmes, et nous donnerons, pour l'intégrale double, les valeurs calculées (J') et les valeurs rectifiées (J)

- Valeurs numériques -

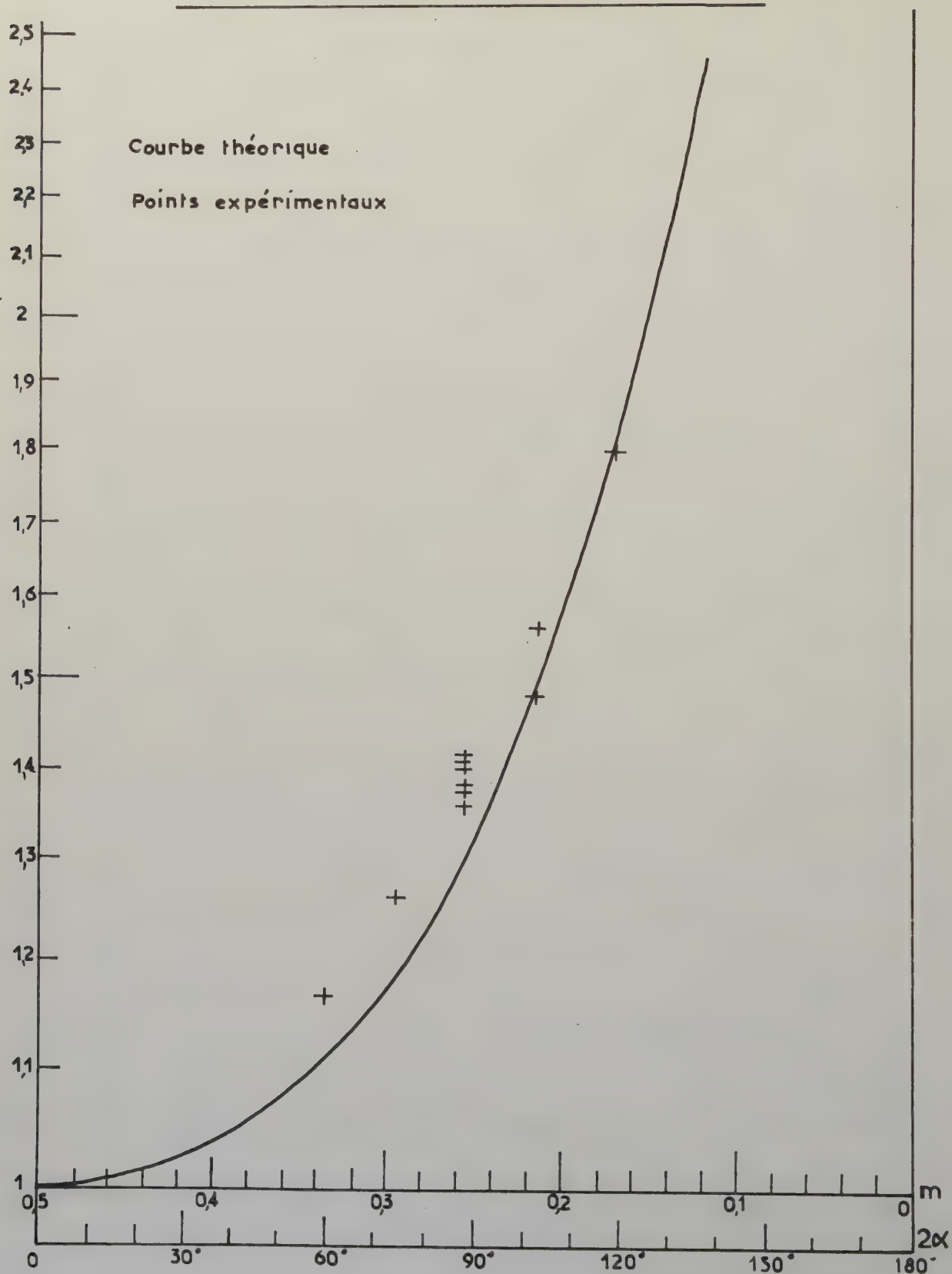
2α	m	J'	J	$\cos \alpha$	C	$\frac{T'}{T_\alpha}$
180	0	0,9642	1	0	1	∞
162	0,05	0,9301	0,966	0,1658	0,9406	5,33
144	0,10	0,9107	0,947	0,3090	0,8979	2,798
126	0,15	0,9057	0,943	0,4540	0,8692	1,963
108	0,20	0,9155	0,954	0,5878	0,8526	1,555
90	0,25	0,9417	0,982	0,7071	0,8473	1,320
72	0,30	0,9869	1,031	0,8090	0,8526	1,174
54	0,35	1,0557	1,104	0,8910	0,8692	1,082
36	0,40	1,1551	1,209	0,9511	0,8979	1,027
18	0,45	1,2962	1,358	0,9877	0,9406	1,002
0	0,50	1,4971	1,571	1	1	1

INTEGRALE $J(\alpha)$



$\frac{T}{T_0}$

RAPPORT DES PERIODES CORRESPONDANTES



5. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

La relation obtenue pour exprimer le rapport des périodes correspondantes de vibration d'une même poutre quand elle flotte et quand elle est libre, ne fait intervenir que des termes dépendant uniquement de la forme de la section triangulaire, c'est-à-dire de son angle 2α . Ce sont $\cos \alpha$, $C(\alpha)$ et $J(\alpha)$, indépendants en particulier de la grandeur de la section.

Pour vérifier expérimentalement ces résultats, nous effectuerons successivement deux séries de mesures, faisant varier au cours de la première série la forme de la section, et au cours de la seconde série la grandeur de la section immergée.

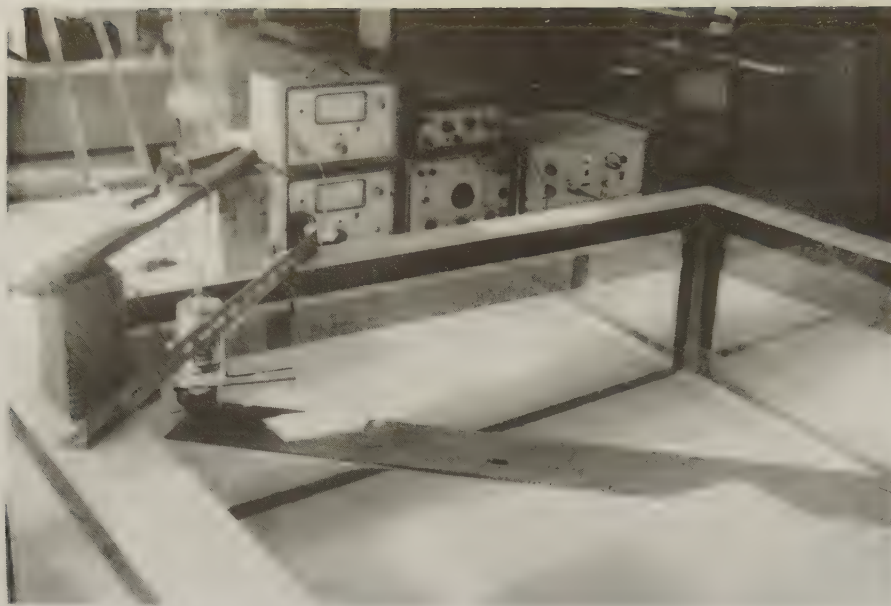
51. VARIATION DE LA FORME

Nos essais ont porté sur une série de planches de section triangulaire isocèle taillées dans une même pièce de bois, et ayant essentiellement des angles différents. Ces angles 2α sont pratiquement compris entre 50° et 150° . Pour un angle trop petit la position d'équilibre de la poutre flottante devient instable, et pour un angle trop grand, la réalisation pratique devient difficile.

Pour chaque planche on a mesuré directement la période fondamentale de vibration en flexion plane verticale de la poutre libre, c'est-à-dire reposant sur deux appuis placés aux noeuds, et pour la poutre flottante on a de même mesuré directement la période fondamentale et les premiers harmoniques.

Nous donnons les résultats de ces mesures sous forme d'un tableau récapitulatif dans lequel nous indiquons pour chaque planche, successivement :

- les dimensions (et en particulier l'angle caractéristique),
- la période mesurée pour la poutre libre, T_a , en ms,
- les premières périodes mesurées pour la poutre flottante, T_2, T_3, T_4 en ms,
- le rapport des deux périodes fondamentales mesurées,
- le rapport théorique correspondant obtenu par application de notre expression,



ENSEMBLE DE L'INSTALLATION EXPERIMENTALE avec le bassin d'expérimentation au premier plan et les appareils de mesure au second plan.



EXPERIMENTATION SUR UNE POUTRE DE SECTION TRIANGULAIRE flottant à la surface de l'eau du bassin

Résultats numériques -

2 α °	150	120	105	105	90	90	90	90	90	75	60
L m	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,2	1,2	1,5	1,5
B mm	143	174	84	120	159	141	120	78	83	47	45
H mm	22	50	31	45	80	70	60	40	41	30	38
T _α ms	28,3	13,81	26,18	15,62	8,55	9,66	11,48	17,55	12,08	25,94	18,70
T ₂ ms	84,6	24,73	38,6	24,45	11,94	13,59	15,77	24,15	17,08	32,7	21,80
T ₃ ms	30,8	9,04	13,40	8,95	4,50	5,09	5,76	8,83	6,18	11,56	8,59
T ₄ ms	15,6	4,68	4,15	4,60	2,43	2,69	2,96	4,52	3,31	6,12	4,15
$\frac{T}{T_{\alpha}}$	2,99	1,792	1,476	1,562	1,396	1,409	1,374	1,377	1,415	1,262	1,168
$\frac{1}{C \cos \alpha} \sqrt{\frac{2J}{\pi}}$	3,22	1,807	1,506	1,495	1,320	1,320	1,320	1,320	1,320	1,193	1,120
Δ %	7,7	0,5	2	4,3	5,4	6,1	3,9	4,2	6,6	5,4	4,1

- l'écart relatif entre ces deux rapports, rapporté au rapport expérimental.

L'écart relatif entre le rapport théorique et le rapport expérimental reste toujours remarquablement faible puisqu'il ne dépasse jamais 4 %.

Nous avons également porté les points figuratifs des mesures ainsi effectuées sur le graphique en coordonnées semi-logarithmiques sur lequel nous avons déjà construit la courbe théorique traduisant les variations de ce rapport suivant l'expression que nous proposons.

Les points expérimentaux restent tous au voisinage immédiat de cette courbe.

52. VARIATION DE LA SECTION IMMERGÉE

Nous avons fait varier la grandeur de la section immergée d'une poutre en la chargeant progressivement. Pour ces mesures nous avons utilisé une poutre métallique creuse de section triangulaire rectangle-isocèle, réalisée avec une tôle de 1 mm pliée et soudée, renforcée par 14 entretoises équidistantes de diamètre 2 mm. Cette poutre, de masse 3,1 kg, de longueur 1,5 m, de largeur extérieure 14,1 cm et d'immersion à vide 4,45 cm pour périodes fondamentales : dans l'air : 7,67 ms, et quand elle flotte : 10,58 ms.

La poutre a été progressivement chargée avec du sable réparti sur toute sa longueur. On donne ci-dessous les résultats des mesures pour chaque surcharge m :

m_{kg}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$T_a \text{ ms}$	7,67	7,76	7,86	7,99	8,04	8,13	8,23
$T \text{ ms}$	10,58	10,71	10,83	10,98	11,11	11,23	11,36
$\frac{T}{T_a}$	1,379	1,380	1,380	1,379	1,381	1,381	1,379

m kg	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
T _a ms	8,42	8,61	8,76	8,92	9,09	9,25	9,39
T ms	11,63	11,89	12,07	12,30	12,53	12,77	12,94
$\frac{T}{T_a}$	1,382	1,382	1,380	1,379	1,380	1,380	1,380

m kg	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4
T _a ms	9,52	9,64	9,77	9,90	10,03	10,15	10,28
T ms	13,13	13,37	13,55	13,74	13,91	14,04	14,18
$\frac{T}{T_a}$	1,381	1,382	1,382	1,384	1,383	1,383	1,382

Ainsi, tandis que la section immergée varie du simple au double, le rapport des périodes correspondantes reste très sensiblement constant.

6. CONCLUSION

Comme précédemment dans le cas des poutres de section rectangulaire nous avons établi pour les poutres droites de section triangulaire-isocèle, une expression théorique du rapport des périodes correspondantes pour un même mode de vibration en flexion plane verticale de la poutre libre et de la poutre flottante.

Cette expression, obtenue indépendamment de la notion de masse virtuelle, a été établie en explicitant l'action du liquide entourant la poutre sur celle-ci dans un écoulement défini en formulant certaines hypothèses simplificatrices. Elle s'écrit :

$$\frac{T}{T_a} = \frac{1}{C \cos \alpha} \sqrt{\frac{2 J}{\pi}}$$

où $J = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m dx \int_1^\infty \left(\frac{s^2}{s^2-1} \right) \ln \frac{s^2-x^2}{s^2-1} ds$

et $C = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m dx$ avec $m = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi}$

Nous avons exploité numériquement l'expression obtenue, l'intégrale double J ayant été calculée par le Centre de Calcul Scientifique de l'E.N.S.M. Ainsi, nous avons pu construire la courbe représentant des variations du rapport $\frac{T}{T_a}$ en fonction de l'angle 2α de la section, dont seulement il dépend.

Nous avons enfin effectué un certain nombre d'essais expérimentaux pour confronter les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Cette confrontation a montré un bon accord puisque l'écart ne dépasse en général pas 5 %. Cet accord est meilleur que dans le cas des poutres de section rectangulaire, ce qui était d'ailleurs attendu puisqu'ici il n'y a plus comme précédemment de risque de décollement pour l'écoulement autour de la poutre flottante.

5. Inertie de rotation et force de cisaillement

- 51. Cas de la poutre libre
- 52. Solution de l'équation différentielle
- 53. Valeurs numériques. Ecart pour la période de résonance
- 54. Poutre flottante

6. Amortissement interne de la poutre

- 61. Equation différentielle du mouvement
- 62. Périodes de résonance
- 63. Résultats

7. Viscosité du liquide

- 71. Frottement du liquide sur la poutre
- 72. Equation du mouvement de la poutre flottante et période de résonance
- 73. Action sur les extrémités de la poutre

8. Conclusion

INTRODUCTION

Pour obtenir une expression des périodes de résonance des poutres droites de section rectangulaire constante flottant à la surface d'un liquide et vibrant en flexion plane verticale, nous avons étudié l'écoulement du liquide autour de la poutre et nous avons explicité l'action du liquide sur la poutre dans cet écoulement.

Mais, pour effectuer cette étude, nous avons dû formuler un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Ces simplifications nous ont donc écartés des conditions réelles et les résultats obtenus ne pouvaient être qu'approchés. Nous avons d'ailleurs confronté les résultats de nombreux essais expérimentaux à ceux déduits de l'application de notre expression et nous nous sommes ainsi assurés expérimentalement que les écarts restaient suffisamment faibles pour que l'expression proposée puisse constituer une bonne première approximation. Ainsi les phénomènes négligés peuvent effectivement être considérés comme secondaires.

Nous nous proposons maintenant de tenir compte de ces phénomènes négligés et de préciser l'influence séparée de chacun sur les périodes de résonance de la poutre.

Ainsi nous étudierons successivement ici :

- l'influence de la déformation de la surface libre du liquide.
- l'influence de la variation de la hauteur immergée de la poutre pendant sa vibration.
- l'influence des termes quadratiques pour la vitesse.
- l'influence de l'inertie de rotation et des forces de cisaillement.
- l'influence de l'amortissement interne de la poutre.
- l'influence de la viscosité du liquide.

Dans chacun des cas, nous déterminerons le terme correctif correspondant et nous donnerons sa valeur numérique relative.

2. DEFORMATION DE LA SURFACE LIBRE DU LIQUIDE

21. HYPOTHESES

Nous étudions, comme précédemment, les vibrations d'une poutre droite, élastique, de section rectangulaire constante, flottant à la surface d'un liquide.

Nous formulons les mêmes hypothèses concernant :

- les vibrations : vibrations harmoniques en flexion plane verticale,
- le liquide : liquide parfait,
- l'écoulement : écoulement plan dans des plans de section droite de la poutre.

Pour étudier l'écoulement nous effectuons la même transformation conforme de Schwarz, transformant la partie du plan z de section droite occupée par le liquide en le demi-plan $Y \geq 0$ d'un plan Z .

$$\frac{dz}{dZ} = -A (Z^2 - 1)^{-1/2} (Z^2 - \lambda^2)^{+1/2}$$

Pour définir le potentiel complexe de l'écoulement dans le plan Z , nous plaçons toujours sur la partie de l'axe réel image de la surface libre un tapis de sources débitant dans le demi-plan $Y > 0$ et de densité μ telle que le déplacement de la surface libre soit indépendant du point considéré dans un plan Z donné. Nous avons noté que cette hypothèse correspond à des déformations cylindriques de la surface libre, de génératrice perpendiculaire à la poutre, et nous avons terminé le calcul en négligeant ces déformations.

Nous reprenons ici ce calcul en considérant que la surface libre est déformée et que sa configuration est cylindrique, de génératrice perpendiculaire à la poutre. Nous avons déjà noté que les déformations observées expérimentalement ont effectivement cette allure, laquelle est compatible avec les conditions aux limites au contact avec la poutre.

Une telle déformation est enfin compatible avec la condition de surface libre, qui conduit alors, pour des déformations pouvant être considérées comme infiniment petites à une déformée sinusoïdale.

Nous admettrons donc que les vibrations de la poutre créent à la surface du liquide une houle sinusoïdale, et c'est dans cette hypothèse que nous étudions maintenant l'écoulement du liquide, son action sur la poutre et les vibrations de celle-ci.

22. EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA DEFORMEE DE LA POUTRE

Soit O le centre de la face inférieure de la poutre. Dans le plan de section droite de O , soient Ox horizontal et Oy vertical ascendant. Oz longitudinal complète le trièdre de référence direct lié à la poutre.

Avec nos hypothèses, la surface libre est de la forme :

$$\xi = a \cos kz \sin \omega t$$

avec, pour une onde de gravité $\omega^2 = g k$

et si on tient compte également de la tension superficielle τ :

$$\omega^2 = g k + \frac{\tau k^3}{\rho'}$$

Ainsi la vitesse verticale relative de la surface libre par rapport à la poutre, est dans le plan z :

$$v \cos \omega t = -\eta' + \xi'$$

η étant le déplacement de la poutre.

Avec $\eta = Y(z) \sin \omega t$, il vient

$$v = -\omega (X - a \cos kz)$$

Le calcul de l'action du liquide sur la poutre dans le plan z est inchangé. On obtient :

$$F = p_e B + \rho S g + S \eta'' - \frac{2 A^2}{\pi} \rho' v \omega \sin \omega t. J$$

d'où en tenant compte de la nouvelle valeur de la vitesse v :

$$F = p_e B + \rho S g + \rho S \eta'' - \frac{\rho S J}{\pi \alpha \beta} (\eta'' - a \omega^2 \cos kz \sin \omega t)$$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique à un élément de poutre, on en déduit l'équation différentielle simplifiée du mouvement de la poutre.

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \rho S \frac{J}{\pi \alpha \beta} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a \omega^2 \cos k z \sin \omega t \right] = 0$$

Avec une solution de la forme $\eta = Y(z) \sin \omega t$, il vient :

$$EI Y''''(z) - \rho S \frac{J}{\pi \alpha \beta} \omega^2 [Y(z) + a \cos kz] = 0$$

ou en posant :

$$\frac{\rho S}{EI} \frac{J}{\pi \alpha \beta} \omega^2 = m^4$$

$$Y'''' - m^4 Y = a m^4 \cos kz$$

C'est la nouvelle équation différentielle à laquelle satisfait la déformée de la poutre $Y(z)$

23. SOLUTION. CONDITIONS AUX LIMITES

Rappelons que pour une surface libre du liquide indéformée, l'équation différentielle de la déformée de la poutre était :

$$Y'''' - m_o^4 Y = 0$$

où, de même on a posé :

$$m_o^4 = \frac{\rho S}{EI} \frac{J}{\pi \alpha \beta} \omega^2$$

Sa solution est, suivant le nombre p de noeuds de la déformée :

$$Y = Y_o (\cos m_o z + A_o \operatorname{ch} m_o z) \quad \text{pour un nombre pair de noeuds}$$

$$Y = Y_o (\sin m_o z + A'_o \operatorname{sh} m_o z) \quad \text{pour un nombre impair de noeuds}$$

$$A_o = \frac{\cos \frac{m_o L}{2}}{\operatorname{ch} \frac{m_o L}{2}} = - \frac{\sin \frac{m_o L}{2}}{\operatorname{sh} \frac{m_o L}{2}} \quad \text{et} \quad A'_o = \frac{\sin \frac{m_o L}{2}}{\operatorname{sh} \frac{m_o L}{2}} = \frac{\cos \frac{m_o L}{2}}{\operatorname{ch} \frac{m_o L}{2}}$$

$$\text{et } \cos m_o L \operatorname{ch} m_o L = 1$$

$$m_o L = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

Considérons ici la cas d'un nombre pair de noeuds. La déformée de la poutre sera de la forme :

$$Y = Y_0 (\cos mz + A \operatorname{ch} mz + \mu \cos kz)$$

$$\text{avec } \mu = \frac{a m^4}{k^4 - m^4} = \frac{a s^4}{1 - s^4}$$

$$\text{en posant } s = \frac{m}{k}$$

Les nouvelles valeurs de m et de A sont déterminées par les conditions aux limites de la poutre.

Le liquide étant toujours supposé parfait on néglige son action sur les bords de la poutre et les conditions aux limites restent que l'effort tranchant et le moment de flexion soient nuls aux extrémités, c'est-à-dire :

$$-\cos \frac{mL}{2} + A \operatorname{ch} \frac{mL}{2} - \frac{a s^2}{(1-s^4)Y_0} \cos \frac{kL}{2} = 0$$

$$\sin \frac{mL}{2} + A \operatorname{sh} \frac{mL}{2} + \frac{as}{(1-s^4)Y_0} \sin \frac{kL}{2} = 0$$

On en tire :

$$A = \frac{\cos \frac{mL}{2}}{\operatorname{ch} \frac{mL}{2}} + \frac{as^2 \cos \frac{kL}{2}}{(1-s^4)Y_0 \operatorname{ch} \frac{mL}{2}} = \frac{-\sin \frac{mL}{2}}{\operatorname{sh} \frac{mL}{2}} - \frac{as \sin \frac{kL}{2}}{(1-s^4)Y_0 \operatorname{sh} \frac{mL}{2}}$$

La longueur d'onde des vagues étant toujours petite devant la longueur de la poutre, a sera petit même pour les premiers modes de résonance.

Nous cherchons les variations de m et de A en fonction de s que nous considérons comme infiniment petit principal.

Effectuant des développements limités au premier ordre, et en posant :

$$\varepsilon = \Delta \left(\frac{mL}{2} \right) = (m - m_0) \frac{L}{2}$$

les relations précédentes deviennent :

$$A = \frac{\cos \frac{m_0 L}{2} - \varepsilon \sin \frac{m_0 L}{2}}{\operatorname{ch} \frac{m_0 L}{2} + \varepsilon \operatorname{sh} \frac{m_0 L}{2}} = \frac{-\sin \frac{m_0 L}{2} - \varepsilon \cos \frac{m_0 L}{2} - \frac{as}{Y_0} \sin \frac{kL}{2}}{\operatorname{sh} \frac{m_0 L}{2} + \varepsilon \operatorname{ch} \frac{m_0 L}{2}}$$

Ou encore, en tenant compte de la relation $\operatorname{tg} \frac{m_o L}{2} = - \operatorname{th} \frac{m_o L}{2}$

$$A = A_o = A_o \left[1 + 2 \mathcal{E} \cotg \frac{m_o L}{2} + \frac{as}{Y_o} \frac{\sin \frac{kL}{2}}{\sin \frac{m_o L}{2}} \right]$$

Ainsi, en se limitant aux variations du premier ordre

$$\begin{aligned} A &= A_o \\ \text{et} \quad \mathcal{E} &= - \frac{as}{2Y_o} \frac{\sin \frac{kL}{2}}{\cos \frac{m_o L}{2}} \end{aligned}$$

24. NOUVELLES PERIODES DE RESONANCE

Comme $\cos \frac{m_o L}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'écart maximum pour $\mathcal{E}$ sera :

$$\mathcal{E} = \Delta \left(\frac{mL}{2} \right) = \frac{as}{Y_o \sqrt{2}}$$

Il en résultera pour les périodes correspondantes un écart relatif :

$$\frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta m}{m}$$

d'où :

$$\frac{\Delta T}{T} = 2 \sqrt{2} \frac{a}{Y_o k L}$$

ou enfin, en fonction de la longueur d'onde de la déformée de la surface libre :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{a}{y_o} \frac{\lambda}{L}$$

25. ORDRE DE GRANDEUR PRATIQUE DE LA CORRECTION

On peut évaluer sommairement l'amplitude a de la houle en considérant que son énergie surfacique est constante et sensiblement égale à l'énergie surfacique moyenne de la poutre, soit :

$$\frac{\rho s \omega^2 Y_o^2}{4 B} = \frac{\rho' \omega^2 a^2}{4 k}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{a^2}{Y_o^2} = k h = 2\pi \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{on en tire} \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\lambda h}}{L} = 1,13 \frac{\sqrt{\lambda h}}{L}$$

La longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ est donnée en fonction de la période des oscillations à partir de la relation déjà rappelée

$$\omega^2 = g k + \frac{\tau k^3}{\rho'}$$

On a ainsi construit la courbe représentative des longueurs d'onde λ en mm en fonction des périodes T en ms dans le cas de l'eau pour lequel

$$\tau = 75.10^{-3} \text{ kg/s}^2$$

26. RESULTATS

Nous donnons dans un tableau les résultats relatifs à un certain nombre de poutres qui ont déjà fait l'objet de mesures et pour lesquelles les périodes de résonance observées ont été comparées aux valeurs calculées correspondantes.

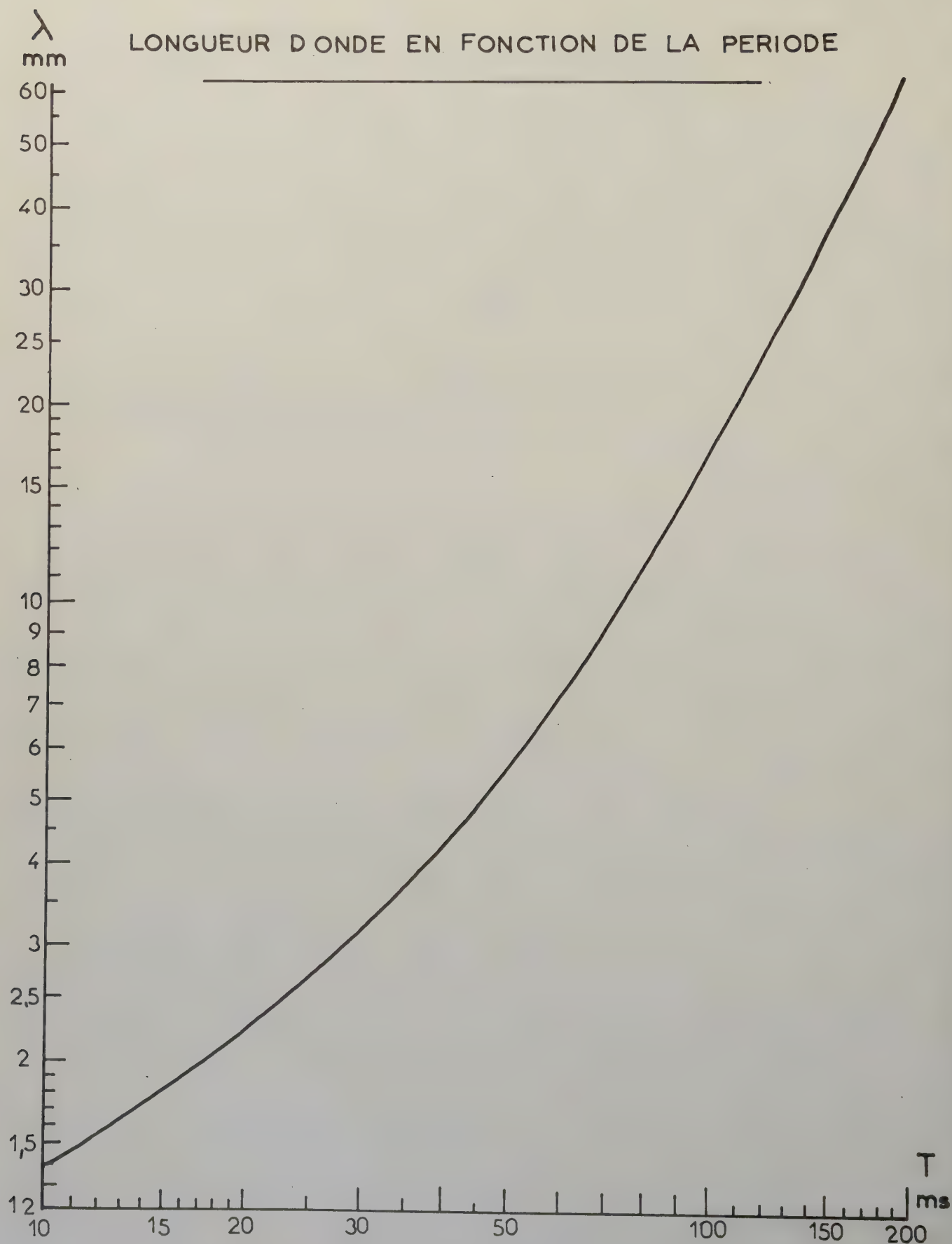
Dans ce tableau, nous avons porté pour chaque poutre successivement, la longueur L (en m), l'immersion h (en mm), la longueur d'onde de la vague (en mm), l'amplitude relative $\frac{a}{Y_o}$ et l'écart relatif maximum calculé au moyen de l'expression ci-dessus $\frac{\Delta T}{T}$

On constate que cet écart, pour des poutres très variées quant à leur forme et leur grandeur reste toujours compris entre 0,5 et 1,5 %.

On peut admettre une valeur moyenne de l'ordre de 1 %.

Nous avons procédé de même pour un caisson de 2 tonnes (dimensions 4,7 x 3 x 1) et pour une péniche de 15 tonnes à vide (dimensions 21 x 4,1 x 1,3) sur lesquels nous avons aussi effectué des mesures en faisant varier l'immersion par chargement progressif. Pour chacun nous retenons ici 3 états de chargement :

LONGUEUR D'ONDE EN FONCTION DE LA PERIODE



N°	L m	h mm	T ms	$\frac{a}{Y_o}$	λ mm	$\sqrt{\lambda h}$ mm	$\frac{\Delta T}{T}$ %
1	2	8,7	151,9	1,20	28	18,2	1,03
2	2	8,7	139,4	1,31	22	16,7	0,95
3	2	8,8	121,2	1,49	25	14,8	0,84
4	2	8,8	106,4	1,71	19	13,8	0,78
5	2	8,8	91,4	1,95	14,5	11,3	0,64
6	2	9,4	73,6	2,47	9,7	9,55	0,54
7	2	10,4	66,1	2,77	8,5	9,40	0,53
8	2	11,4	59,3	3,20	7,0	8,94	0,50
9	2	31,0	24,8	8,63	2,6	9,0	0,51
10	2	25,8	31,3	7,12	3,2	9,1	0,51
11	2	15,5	61,9	5,27	7,4	10,7	0,60
12	2	10,2	108,1	5,95	19,5	14,1	0,80
13	2	6,4	193	0,82	60	19,6	1,11
14	2	5,2	248	0,57	96	22,4	1,27
15	2	4,3	354	0,37	200	29,4	1,64
16	2	14	50,5	3,92	5,7	8,9	0,50
17	2	17,1	52,0	4,27	5,9	10	0,56
18	2	35,6	58,6	5,66	7,0	15,8	0,89
19	4	12,7	297	0,73	150	43,7	1,24
20	3,6	10,7	267	0,78	110	34,3	1,08
21	3,15	50	95	4,50	15,5	27,8	1,0
22	3,07	44	78	5,06	10,8	21,8	0,80
23	3,0	22	150	1,93	37	28,6	1,08
24	2,50	11,3	107	2,67	19,2	20,6	0,93
25	2,10	43	200	1,05	64	27	1,46
26	2,10	9,6	32,5	8,91	3,4	12,1	0,65
27	1,30	12,8	41,8	3,71	4,4	6,5	0,57
28	0,80	9	12,4	7,03	1,63	4,57	0,65
29	1	43	33,9	3,94	3,6	5,7	0,65
30	3,06		68,1	5,51	8,9	19,6	0,73

Caisson

h mm	T ms	mm	$\frac{a}{Y_0}$	$\frac{T}{T}$ %
210	130,4	27	7,0	1,8
340	140,9	32	8,2	2,5
580	153,3	36	10,1	3,4

Péniche

295	270	116	2,54	1,0
481	296	140	3,44	1,4
667	309	150	4,44	1,7

Ainsi la déformation de la surface libre créée par la vibration d'une poutre flottant sur ce liquide entraîne un écart appréciable pour les périodes de vibration de la poutre. Cet écart par rapport aux périodes correspondantes pour une surface libre indéformée, a pu être étudié et évalué dans l'hypothèse d'une déformation cylindrique sinusoïdale.

Dans ce cas, l'écart sur les périodes de résonance atteint couramment de 1 à 2 % ; mais, les résultats obtenus ne peuvent que fixer les ordres de grandeur, car le modèle de déformation envisagé n'est qu'approché. La forme réelle de la surface libre du liquide s'écarte de ce modèle aux deux extrémités de la poutre.

3. VARIATION PERIODIQUE DE L'IMMERSION

31. EQUATION DIFFERENTIELLE

Nous avons toujours considéré la hauteur immergée h de la poutre flottante comme une constante. Nous abandonnons maintenant cette hypothèse simplificatrice, et nous cherchons l'influence de sa variation cyclique sur la période de résonance. Par contre, nous négligeons à nouveau ici, la déformation de la surface libre du liquide. Avec ces hypothèses, l'immersion de la poutre sera :

$$h = A\alpha = h_0 - \eta$$

h_0 étant l'immersion de la poutre au repos.

L'expression de la pression en un point de la face inférieure de la poutre devient, d'après le théorème de BERNOULLI :

$$p = p_e + \rho'(g + \eta'')(h_0 - \eta) - \frac{\rho' A v \omega}{\pi} \sin \cot \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{s^2 - \lambda^2}}{s^2 - 1} \ln \frac{s^2 - x^2}{s^2 - 1} ds$$

En intégrant le long du fond, on en déduit l'action du liquide sur la poutre :

$$F = 2 \int_0^{B/2} p \, dx$$

$$F = p_e B + \rho' B (g + \eta'')(h_0 - \eta) - 2 \rho' \frac{A^2 v \omega}{\pi} \sin \cot J$$

Les relations habituelles entre les paramètres de la poutre deviennent :

$$2 A^2 = \frac{B}{\alpha \beta} (h_0 - \eta)$$

$$\rho' B h_0 = \rho B H = \rho S$$

Ainsi, l'action du liquide sur la poutre s'écrit :

$$F = p_e B + \rho S (g + \eta'') \left(1 - \frac{\eta}{h_0}\right) - 2 \rho' \frac{A^2 v \omega}{\pi} \sin \cot. J$$

Dans le cas où on néglige les déformations de la surface libre et où on prend : $v = - \eta_o \omega$ cette expression devient :

$$F = p_e B + \rho S g (1 - \frac{\eta}{h_o}) - \rho S \eta'' (\frac{J}{\pi \alpha \beta} - 1) (1 - \frac{\eta}{h_o})$$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique à un élément de poutre, on obtient encore l'équation différentielle du mouvement de la poutre, qui s'écrit ici :

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \rho S g \frac{\eta}{h_o} + \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{J}{\pi \alpha \beta} - \frac{\rho S}{h_o} (\frac{J}{\pi \alpha \beta} - 1) \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

32. PREMIERE APPROXIMATION. EQUATION LINEAIRE

Comme première approximation, on peut négliger le terme du second ordre de l'équation obtenue. Celle-ci se réduit alors à l'équation linéaire:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \rho S g \frac{\eta}{h_o} + \rho S \frac{J}{\pi \alpha \beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

On en cherche une solution harmonique $\eta = y(z) \sin \omega t$.

En portant dans l'équation ci-dessus il vient :

$$EI y^{IV} + \rho S g \frac{y}{h_o} - \rho S \omega^2 \frac{J}{\pi \alpha \beta} y = 0$$

$$y^{IV} - \frac{\rho S}{EI} (\frac{J}{\pi \alpha \beta} \omega^2 - \frac{g}{h_o}) y = 0$$

ou en posant : $m^4 = \frac{\rho S}{EI} (\frac{J}{\pi \alpha \beta} \omega^2 - \frac{g}{h_o})$

$$y^{IV} - m^4 y = 0$$

L'équation est du même type que celle précédemment écrite, m_o étant seulement remplacé par m .

Pour une déformée ayant p noeuds, on doit donc avoir très sensiblement :

$$mL = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

d'où en portant dans l'expression définissant m :

$$\frac{\rho S L^4}{EI} \frac{J}{\pi \alpha \beta} \omega^2 = (2p - 1)^4 \frac{\pi^4}{16} + \frac{\rho S L^4}{EI} \frac{g}{h_0}$$

et la période a pour valeur :

$$T_p = \frac{8 L^2}{\pi (2p - 1)^2} \sqrt{\frac{\rho S}{EI} \frac{J}{\pi \alpha \beta}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{16 L^4}{\pi^4 (2p - 1)^4} \frac{\rho S}{EI} \frac{g}{h_0}}}$$

On a finalement le rapport des périodes correspondantes :

$$\frac{T}{T_a} = \sqrt{\frac{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}{1 + \frac{16 L^4}{\pi^4 (2p - 1)^4} \frac{\rho S}{EI} \frac{g}{h_0}}}$$

Cette dernière expression s'écrit encore :

$$\frac{T}{T_a} = \sqrt{\frac{\frac{J}{\pi \alpha \beta}}{1 + \frac{g}{h_0} \frac{T_a^2}{4\pi^2}}}$$

Ainsi, tenant compte de ce terme correctif, les périodes obtenues sont légèrement plus petites que celles précédemment calculées en le négligeant.

L'écart relatif sur les périodes correspondantes est :

$$\frac{\Delta\left(\frac{T}{T_a}\right)}{\frac{T}{T_a}} = - \frac{T_a^2}{8 \pi^2 h_0} \frac{g}{h_0}$$

Ordre de grandeur

Nous donnons les valeurs de ce terme correctif dans le tableau ci-dessous pour les différentes poutres qui ont déjà été étudiées quant au premier terme correctif.

N°	L m	T ms	T _a ms	h _o mm	$\frac{\Delta(T/T_a)}{T/T_a}$ %
1	2	151,9	40,1	8,72	2,31
2	2	139,4	40,0	8,67	2,31
3	2	121,2	39,6	8,79	2,23
4	2	106,4	39,7	8,75	2,24
5	2	91,4	39,7	8,74	2,26
6	2	73,6	40,6	9,40	2,19
7	2	66,1	43,15	10,40	2,22
8	2	59,3	44,51	11,40	2,17
9	2	24,8	13,51	31,0	0,07
10	2	31,3	16,10	25,82	0,10
11	2	61,9	26,10	15,55	0,55
12	2	108,1	40,0	10,24	1,95
13	2	193	66,2	6,37	8,62
14	2	248	79,5	5,25	15,12
15	2	354	100,2	4,35	29,8
16	2	50,5	22,68	14	0,46
17	2	52,0	25,03	17,09	0,45
18	2	58,6	35,13	35,6	0,43
19	4	297	138,0	12,72	18,7
20	3,6	267	118,8	10,75	16,4
21	3,15	95	47,9	49,7	0,58
22	3,07	78	45,26	43,9	0,57
23	3,0	150	83,4	22,00	3,94
24	2,50	107	61,3	22,05	2,14
25	2,10	200	89,3	11,30	8,83
26	2,10	32,5	19,17	43,3	0,11
27	1,30	41,8	17,35	9,64	0,39
28	0,80	12,4	5,82	12,80	0,03
29	1	33,9	13,16	9,00	0,24
30	3,06	68,1	44,10	43,00	0,57

Nous donnons aussi les valeurs de ce terme correctif pour les mesures effectuées sur le caisson flottant de 4m, et sur la péniche. Mais, dans ces expériences il n'a pas été possible de mesurer la période de la poutre libre, et les valeurs que nous donnons sont les valeurs approchées déduites des valeurs mesurées sur la poutre flottante par application de l'expression que nous proposons.

On a ainsi :

Caisson

h mm	$\frac{B}{h}$	$\frac{T}{T_a}$	T ms	T_a ms	$\frac{\Delta(T/T_a)}{T/T_a} \%$
21	14,0	2,08	130,4	62,6	0,24
34	8,7	1,81	140,9	77,8	0,22
58	5,1	1,57	153,3	97,8	0,20

Péniche

h cm	$\frac{B}{h}$	$\frac{T}{T_a}$	T ms	T_a ms	$\frac{\Delta(T/T_a)}{T/T_a} \%$
29,5	13,9	2,07	270	130	0,72
48,1	8,54	1,80	296	165	0,70
66,7	6,16	1,65	309	187	0,66

Ainsi, pour la plupart des poutres considérées le terme correctif considéré ici a une valeur numérique de l'ordre de 1 à 2 %.

Mais, ce terme peut devenir très important pour les poutres les plus flexibles (par exemple, poutres n° 14, 15, 19 et 20)

Pour une poutre de section rectangulaire homogène et pour le mode fondamental, ce terme peut encore s'écrire :

$$\lambda = \frac{\Delta(T/T_a)}{T/T_a} = \frac{g}{8\pi^2} \frac{T_a^2}{h_o} = \frac{64 L^4 g}{8\pi^4 (2p-1)^4 EI h_o} = \frac{32}{27\pi^4} \frac{\rho' g}{E} \frac{L^4}{H^3}$$

Dans le cas d'une poutre en bois flottant sur de l'eau on a sensiblement (en unités légales)

$$\lambda \approx 10^{-8} \frac{L^4}{H^3}$$

Ainsi, pour $\frac{L}{H} = 100$ (valeur courante pour une poutre), $\lambda = 1\%$ pour $L = 1$ m et $\lambda = 10\%$ pour $L = 10$ m

Pour $\frac{L}{H} = 50$ on a $\lambda = 1\%$ pour $L = 8$ m et $\lambda = 10\%$ pour $L = 80$ m

alors que pour $\frac{L}{H} = 200$ on aurait déjà $\lambda = 10\%$ pour $L = 1,25$ m.

On peut enfin noter que la prise en considération du terme envisagé n'est pas seulement une correction pour les poutres très flexibles pour lesquelles il modifie complètement la valeur des périodes de résonance. Pour L augmentant indéfiniment (les autres paramètres restant constants), ce terme devient même prépondérant et la période de résonance au lieu de croître indéfiniment tend vers une valeur limite

$$T_{L\infty} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\pi\alpha\beta} \frac{h_o}{g}}$$

Ce phénomène a d'ailleurs été constaté expérimentalement lors des essais systématiques effectués en fonction de la longueur de la poutre ou de sa hauteur. En effet, pour les poutres les plus flexibles, les points expérimentaux s'écartent des courbes théoriques, au-dessous de celles-ci.

Ceci ne concerne toutefois que des cas extrêmes, et dans tous les cas courants, la correction reste, comme nous l'avons vu, petite, ou même négligeable.

33. EQUATION COMPLETE. SOLUTION APPROCHEE

L'équation différentielle complète s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\pi \alpha \beta}{J} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \frac{g}{h_o} \frac{\pi \alpha \beta}{J} \eta = \left(1 - \frac{\pi \alpha \beta}{J}\right) \frac{\eta}{h_o} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

ou en posant : $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \eta''$ $\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = \eta^{IV}$

et $\frac{EI}{\rho} \frac{\pi \alpha \beta}{J} = a$ $\frac{g}{h_o} \frac{\pi \alpha \beta}{J} = b$ $\left(1 - \frac{\pi \alpha \beta}{J}\right) \frac{1}{h_o} = c$

elle s'écrit :

$$\eta'' + a \eta^{IV} + b \eta - c \eta \eta''$$

Pour $c = 0$ on retrouve l'équation linéaire simplifiée.

Dans le cas général, c n'est pas nul, mais reste petit et la solution reste voisine de la solution de l'équation linéaire.

On cherche donc une solution approchée de cette équation, de pulsation ω (voisin de ω_o) se réduisant à la solution η_o pour $c = 0$ où

$$\eta_o = Y \sin \omega_o t$$

avec $Y = Y_o (\cos m_o z + A \operatorname{ch} m_o z)$ pour un nombre de noeuds q pair
ou $Y = Y_o (\sin m_o z + A \operatorname{sh} m_o z)$ pour un nombre impair

et $\omega_o^2 = a m_o^4 + b$

La solution approchée cherchée est donc de la forme :

$$\eta = \eta_o + c \eta_1 + c^2 \eta_2$$

et on pose :

$$\omega_o^2 = \omega^2 + \alpha c + \beta c^2$$

Posons encore de même :

$$m_o^4 = m^4 + \lambda c + \mu c$$

Portant ces expressions dans l'équation différentielle

$$\eta'' + a \eta^{IV} + (\omega_0^2 - a m_0^4) \eta = c \eta \eta''$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \eta_0'' + c \eta_1'' + c^2 \eta_2'' + a (\eta_0^{IV} + c \eta_1^{IV} + c^2 \eta_2^{IV}) + [\omega^2 + \alpha c + \beta c^2 \\ - a (m^4 + \lambda c + \mu c^2)] [\eta_0 + c \eta_1 + c^2 \eta_2] = c (\eta_0 + c \eta_1) (\eta_0'' + c \eta_1'') \end{aligned}$$

Cette équation devant être vérifiée quelle que soit la valeur de c , les coefficients des différents facteurs de c doivent être nuls. Elle est donc équivalente au système d'équations :

$$\eta_0'' + a \eta_0^{IV} + (\omega^2 - a m^4) \eta_0 = 0$$

$$\eta_1'' + a \eta_1^{IV} + (\omega^2 - a m^4) \eta_1 = (a \lambda - \alpha) \eta_0 + \eta_0 \eta_0''$$

$$\eta_2'' + a \eta_2^{IV} + (\omega^2 - a m^4) \eta_2 = (a \lambda - \alpha) \eta_1 + (a \mu - \beta) \eta_0 + \eta_0 \eta_1'' + \eta_1 \eta_0''$$

La première de ces équations est vérifiée par :

$$\eta_0 = Y_0 (\cos mz + A \operatorname{ch} mz) \sin \omega t \quad \text{pour un nombre pair de noeuds}$$

$$\text{et } \eta_0 = Y_0 (\sin mz + A \operatorname{sh} mz) \sin \omega t \quad \text{pour un nombre impair de noeuds}$$

Les conditions aux limites imposent : $m = m_0$

On a donc $\eta_0 = Y \sin \omega t$

et $\lambda = 0$, $\mu = 0$

Portant ces résultats dans la seconde équation, il vient :

$$\eta_1'' + a \eta_1^{IV} + (\omega^2 - a m^4) \eta_1 = -\alpha Y \sin \omega t - \frac{\omega^2 Y^2}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

La condition de non résonance des termes perturbateurs impose $\alpha = 0$ puisque le premier terme du membre de droite a la même pulsation ω que le système.

On a donc :

$$\eta_1 = X_1 + Y_1 \sin \omega t + Z_1 \cos 2\omega t$$

avec en particulier (par identification)

$$X_1 = -\frac{Y^2}{2} \quad \text{et} \quad Z_1 = \frac{Y^2}{6}$$

Portant cette valeur de η_1 dans la troisième équation, il vient :

$$\begin{aligned} \eta_2'' + a \eta_2^{IV} + (\omega^2 - a m^4) \eta_2 &= -Y \sin \omega t \left[\beta + \omega^2 (X_1 - \frac{5}{2} Z_1) \right] \\ &- \omega^2 Y (1 - Y_1 \cos 2\omega t + \frac{5}{2} Z_1 \cos 3\omega t) \end{aligned}$$

De la même manière , la condition de non résonance donne ici :

$$\beta = \omega^2 (X_1 - \frac{5}{2} Z_1)$$

C'est-à-dire

$$\beta = -\frac{\omega^2 Y^2}{12}$$

Dans notre calcul approché, on prendra pour Y^2 sa valeur moyenne, soit :

$$Y^2 = \frac{2}{L} Y_0^2 \int_0^{L/2} (\cos mz + A \operatorname{ch} mz)^2 dz$$

$$Y^2 = \frac{Y_0^2}{L} (1 + A^2) \frac{L}{2} + \frac{\sin mL}{2m} + \frac{A^2 \operatorname{sh} mL}{2m}$$

Pour le mode fondamental, avec $mL = \frac{3}{2}$ on a donc très sensiblement :

$$Y^2 = \frac{Y_0^2}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\omega^2 Y_0^2}{24}$$

Influence sur la période de résonance. Ordre de grandeur

ω et ω_0 étant les pulsations respectives tenant compte, et ne tenant pas compte du terme correctif considéré, on a posé :

$$\omega_o^2 = \omega^2 + \beta c^2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\beta c^2}{\omega^2} = - \frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} = - 2 \frac{\Delta\omega}{\omega} = 2 \frac{\Delta T}{T}$$

ou

$$\frac{\Delta T}{T} = - \frac{c^2 Y_o^2}{48} = - \frac{1}{48} \left(1 - \frac{\pi\alpha\beta}{J} \right)^2 \left(\frac{Y_o}{h_o} \right)^2$$

Le terme $\frac{\pi\alpha\beta}{J}$ restant inférieur à un, l'écart relatif reste inférieur à :

$$\frac{1}{48} \left(\frac{Y_o}{h_o} \right)^2 \text{ valeur qu'il atteindrait pour une largeur infinie.}$$

Or, même dans ce cas, il faudrait que $Y_o = \frac{h_o}{2}$

pour que cette correction atteigne 0,5 %. La correction envisagée ici est donc toujours pratiquement négligeable.

4. TERME NEGLIGE CONTENANT LE CARRE DES VITESSES

41. LE TERME NEGLIGE

Le terme qui a été négligé est le terme $\frac{u^2}{2}$ dans l'expression du théorème de Bernoulli

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + U + \frac{p}{\rho'} + \frac{u^2}{2} = K(t)$$

L'action du liquide sur la poutre ainsi négligée est :

$$F_2 = 2 \rho' \int_0^{B/2} \frac{u^2}{2} dx$$

ou u est la vitesse du liquide le long du fond de la poutre.

En utilisant la transformation conforme de Schwarz déjà employée, on a suivant le fond de la poutre :

$$dx = -A \sqrt{\frac{\lambda^2 - X^2}{1 - X^2}} dX$$

$$w = u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dz} = -\frac{W}{A} \sqrt{\frac{1 - Z^2}{\lambda^2 - Z^2}}$$

$$\text{avec } W = U - iV = -\frac{2A\gamma'Z}{\pi} \int_1^\infty \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \frac{ds}{Z^2 - s^2}$$

si on néglige la déformation de la surface libre du liquide.

On en tire :

$$u = \frac{2\gamma'X}{\pi} \sqrt{\frac{1 - X^2}{\lambda^2 - X^2}} \int_1^\infty \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \frac{ds}{s^2 - X^2}$$

$$\text{d'où } F_2 = \frac{8A\rho'\gamma'^2}{\pi^2} J'$$

$$\text{avec } J' = \int_0^\lambda \sqrt{\frac{1 - X^2}{\lambda^2 - X^2}} X^2 dX \left[\int_1^\infty \sqrt{\frac{s^2 - \lambda^2}{s^2 - 1}} \frac{ds}{s^2 - X^2} \right]^2$$

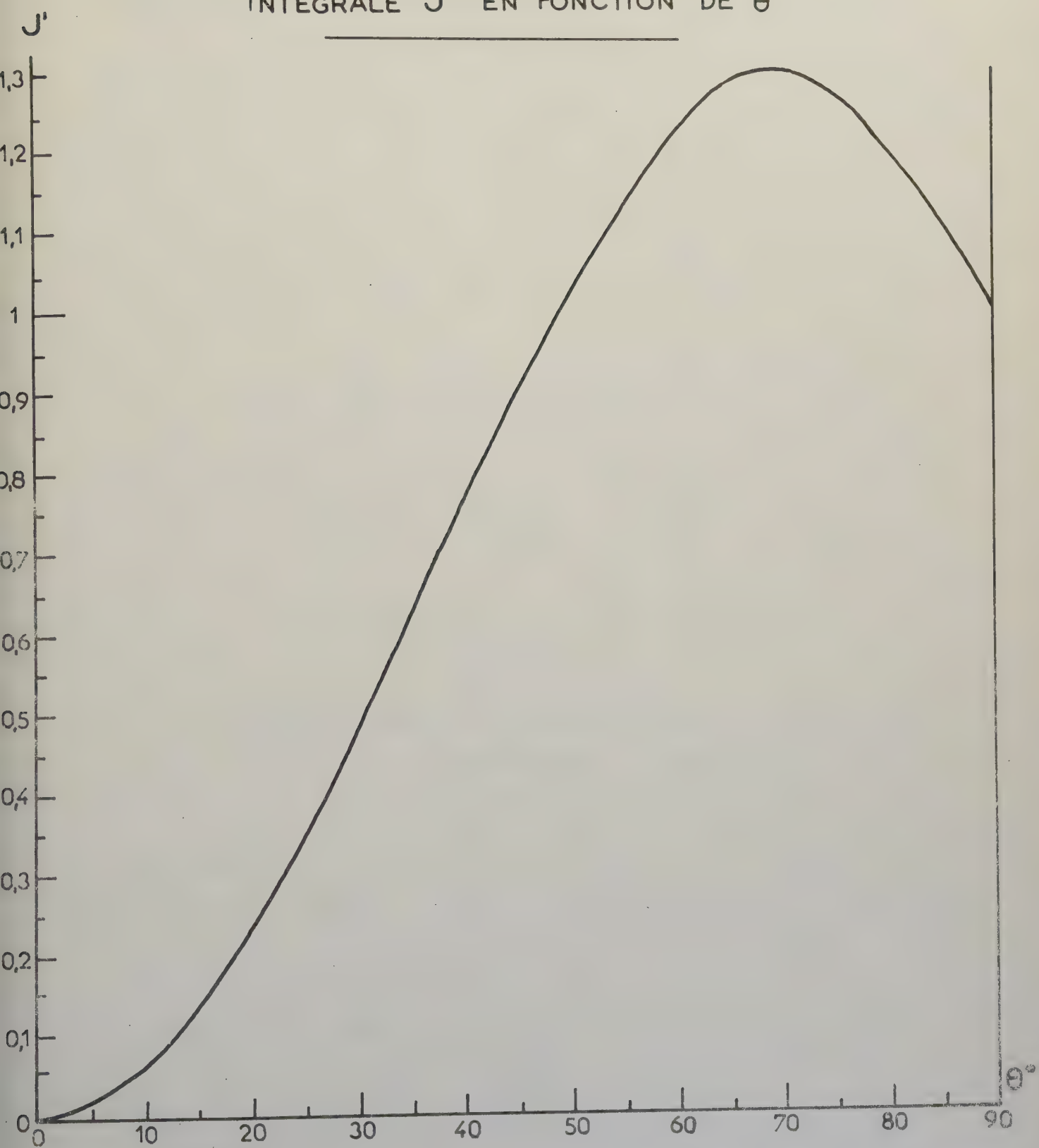
42. INTEGRALE J'

L'intégrale J' a été calculée numériquement par le Centre de Calcul Scientifique de l'E.N.S.M., suivant la forme de la section considérée. Cette forme est comme précédemment caractérisée par le paramètre λ . Les valeurs $J'(\lambda)$ obtenues sont les suivantes :

	J'
0	0
0,10	0,019 629
0,20	0,078 183
0,30	0,174 675
0,40	0,307 147
0,50	0,473 536
0,60	0,668 111
0,70	0,882 202
0,80	1,097 403
0,90	1,264 628
0,92	1,280 517
0,95	1,278 363
0,97	1,245 879
0,99	1,167 179
1	1

On donne les courbes représentatives des variations de J' , en fonction de θ ($\lambda = \sin \theta$)

INTEGRALE J' EN FONCTION DE θ



Ordre de grandeur de J' pour λ tendant vers zéro, et comparaison avec J

Pour λ tendant vers zéro, J' est équivalent à :

$$J'_0 = \int_0^\lambda \frac{x^2}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx \left[\int_1^\infty \frac{\frac{s^2}{s^2 - 1}}{\frac{ds}{s^2}} \right]^2$$

$$\text{avec } \int_1^\infty \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - 1}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{Arc sin } u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

(où on a posé $u = \frac{1}{s}$)

$$\text{d'où } J'_0 = \frac{\pi^2}{4} \int_0^\lambda \frac{x^2}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx, \text{ et en posant } x = \lambda u$$

$$J'_0 = \frac{\lambda^2 \pi^2}{4} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - u^2}} \quad \text{Posons enfin } u = \sin \varphi$$

$$J'_0 = \frac{\lambda^2 \pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\lambda^2 \pi^3}{16}$$

De même pour λ tendant vers zéro, l'intégrale J est équivalente à

$$J_0 = \int_0^\lambda \sqrt{\lambda^2 - x^2} dx \int_1^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2}{s^2 - 1} ds$$

$$\text{avec } \int_1^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} \ln \frac{s^2}{s^2 - 1} ds = \left[\sqrt{s^2 - 1} \ln \frac{s^2}{s^2 - 1} \right]_1^\infty + 2 \int_1^\infty \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - 1}}$$

$$\text{d'où } J_0 = \pi \int_0^\lambda \sqrt{\lambda^2 - x^2} dx, \text{ et en posant } x = \lambda \sin \varphi$$

$$J_0 = \pi \lambda^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi \lambda^2}{2} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2 \lambda^2}{4}$$

43. EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT DE LA POUTRE

Tenant compte de la force F_2 qui vient d'être explicitée et qui avait précédemment été négligée, l'équation du mouvement de la poutre simplifiée (traduisant le théorème de la résultante dynamique pour un élément de poutre), devient :

$$\rho S \frac{J}{\pi \alpha \beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = F_2$$

avec
$$F_2 = \frac{8 A \rho' \eta'^2 J'}{\pi^2}$$

ou encore
$$p^4 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = \lambda p^4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2$$

où on a posé comme d'habitude
$$p^4 = \frac{\rho S}{EI} \frac{J}{\pi \alpha \beta}$$

et dans le cas présent
$$\lambda = \frac{F_2}{EI p^4 \eta'^2} = \frac{8 A \alpha \beta \rho' J'}{\pi \rho S J} = \frac{4 \lambda J'}{\pi h J}$$

ou encore
$$\lambda = \frac{\varphi}{h}$$
 où φ est le coefficient sans dimension

$$\varphi = \frac{4 \lambda J'}{\pi J}$$

Nous chercherons encore une solution approchée à partir de la solution de l'équation ne contenant pas le terme correctif du second membre.

Pour cela, nous admettons encore que l'influence de ce terme correctif est négligeable sur la dérivée quatrième de η par rapport à la cote z , et nous procéderons de la même manière que pour la correction précédente.

Avec
$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = m^4 \eta$$
 l'équation devient

$$p^4 \eta'' + m^4 \eta = \lambda p^4 \eta'^2$$

ou
$$\eta'' + \omega_o^2 \eta = \lambda \eta'^2$$

On cherche une solution approchée en posant encore

$$\eta = \eta_0 + \lambda \eta_1 + \lambda^2 \eta_2$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda a + \lambda^2 b$$

d'où en portant dans l'équation différentielle :

$$\eta_0'' + \lambda \eta_1'' + \lambda^2 \eta_2'' + (\omega^2 + \lambda a + \lambda^2 b) (\eta_0 + \lambda \eta_1 + \lambda^2 \eta_2) = \lambda (\eta_0' + \lambda \eta_1')^2$$

Cette équation est équivalente au système

$$\eta_0'' + \omega^2 \eta_0 = 0$$

$$\eta_1'' + \omega^2 \eta_1 = -a \eta_0 + \eta_0'^2$$

$$\eta_2'' + \omega^2 \eta_2 = -b \eta_0 - a \eta_1 + 2 \eta_0' \eta_1'$$

La première de ces équations est vérifiée par $\eta_0 = Y \sin \omega t$ et les conditions aux limites sont satisfaites si on prend pour Y la même valeur que pour l'équation sans second membre :

$$Y = Y_0 (\cos mz + A \operatorname{ch} mz) \quad \text{pour un nombre pair de noeuds}$$

Portant dans la seconde équation, il vient :

$$\eta_1'' + \omega^2 \eta_1 = -a Y \sin \omega t + \frac{\omega^2 Y^2}{2} (1 + \cos 2\omega t)$$

La condition de non résonance impose encore $a = 0$ et la solution est de la forme

$$\eta_1 = X_1 + Y_1 \sin \omega t + Z_1 \cos 2\omega t$$

avec $X_1 = \frac{Y^2}{2}$ et $Z_1 = -\frac{Y^2}{6}$

Portant dans la troisième équation, il vient de même :

$$\eta_2'' + \omega^2 \eta_2 = -Y \sin \omega t (b + 2\omega^2 Z_1) + \omega^2 Y \left[Y_1 (1 + \cos 2\omega t) - 2 Z_1 \sin 3\omega t \right]$$

La condition de non résonance impose ici

$$b = -2\omega^2 Z_1 = \frac{\omega^2 Y^2}{3}$$

et en prenant pour Y^2 sa valeur moyenne le long de la poutre $Y^2 = \frac{Y_0^2}{2}$

$$b = \frac{\omega^2 Y_0^2}{6}$$

Ainsi, l'écart relatif pour la pulsation et pour la période, par rapport au cas où on néglige le terme correctif est :

$$\frac{\lambda^2 b}{\omega^2} = - \frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} = -2 \frac{\Delta\omega}{\omega} = 2 \frac{\Delta T}{T}$$

d'où
$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\lambda^2 Y_0^2}{12}$$

ou encore
$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\varphi^2}{12} \left(\frac{Y_0}{h} \right)^2$$

44. VALEURS NUMERIQUES

L'écart sur la période de la poutre flottante est ici fonction de la forme de la section de la poutre par le coefficient sans dimension φ , et d'autre part, est comme précédemment proportionnel au carré du rapport de l'amplitude à l'immersion.

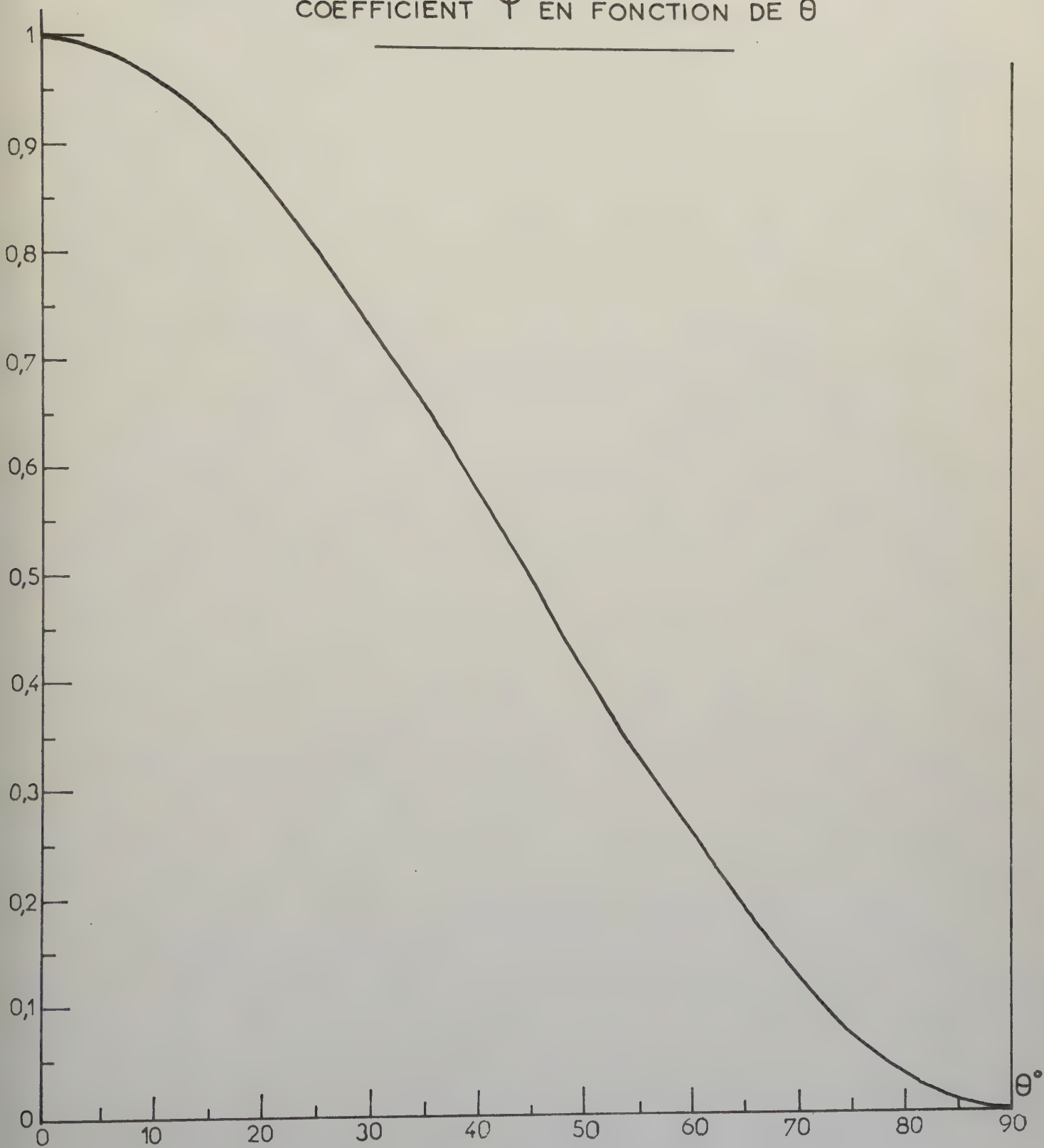
Nous cherchons d'abord la grandeur de ce coefficient φ et sa variation avec la forme de la poutre, en le calculant numériquement pour différentes sections définies par le paramètre habituel Θ .

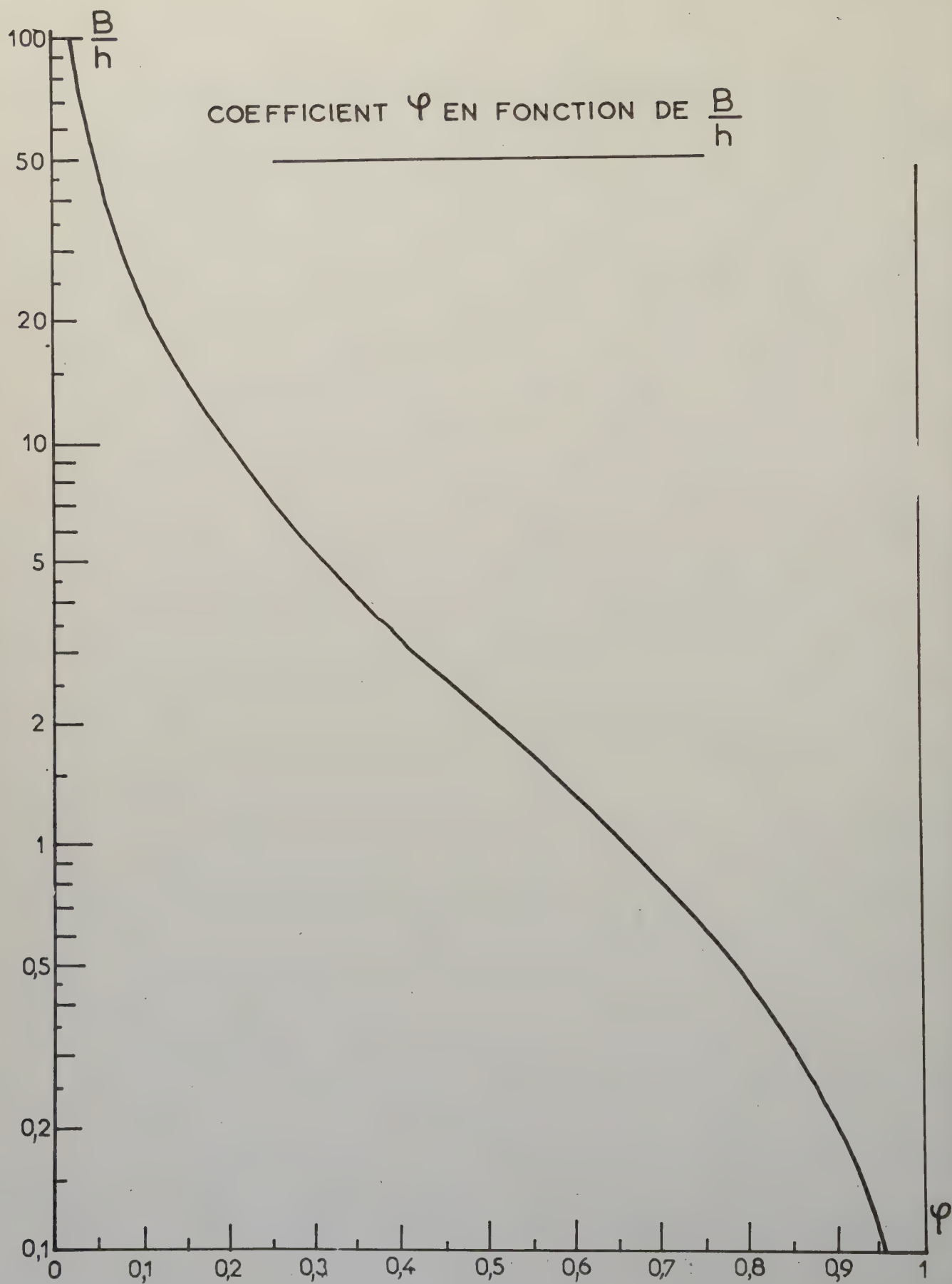
Nous donnons ces valeurs dans le tableau ci-joint ; puis nous donnons la courbe représentative de ces variations, ainsi que la courbe représentative des variations de φ directement en fonction de $\frac{B}{h}$

θ	λ	α	J	J'	$\frac{J'}{J}$	$\frac{B}{h}$	φ
0	0	1	0	0	0,786	0	1
5	0,0872	0,9836	0,0178	0,0145	0,795	0,0104	0,9924
10	0,1736	0,9451	0,074	0,0600	0,802	0,0506	0,9690
15	0,2588	0,8913	0,162	0,131	0,808	0,1198	0,9399
20	0,3420	0,8220	0,278	0,233	0,815	0,2272	0,8766
25	0,4226	0,7521	0,439	0,350	0,829	0,3826	0,8108
30	0,5000	0,6720	0,562	0,473	0,845	0,6050	0,7412
35	0,5736	0,5892	0,713	0,623	0,874	0,9182	0,6860
40	0,6428	0,5057	0,857	0,770	0,900	1,3632	0,5884
45	0,7070	0,4235	1	0,900	0,900	2,0000	0,5000
50	0,7660	0,3447	1,100	1,023	0,931	2,934	0,4116
55	0,8192	0,2705	1,170	1,135	0,969	4,356	0,3340
60	0,8660	0,2032	1,217	1,214	0,998	6,612	0,2588
65	0,9063	0,1437	1,237	1,275	1,033	10,47	0,1892
70	0,9397	0,0933	1,237	1,281	1,036	17,62	0,1234
75	0,9659	0,0532	1,220	1,161	1,034	33,51	0,0701
80	0,9845	0,0239	1,181	1,201	1,017	79,2	0,0310
85	0,9962	0,0059	1,108	1,116	1,009	334	0,0076
90	1	0	1	1	1	∞	0

φ

COEFFICIENT φ EN FONCTION DE θ





5. INERTIE DE ROTATION ET FORCE DE CISAILLEMENT

=====

Pour étudier le mouvement de la poutre vibrante, nous n'avons toujours considéré que l'équation réduite traduisant le théorème de la résultante dynamique pour une déformation de flexion, négligeant ainsi les effets de rotation d'une part, et de cisaillement d'autre part.

Nous considérons maintenant les équations complètes, afin d'apprécier l'importance des termes qui ont été négligés, d'une part dans le cas de la poutre libre, et d'autre part, dans le cas de la poutre flottante.

51. CAS DE LA POUTRE LIBRE

Le déplacement vertical η d'une section donnée de la poutre est la somme de ses déplacements, en flexion η_f et en cisaillement η_c

$$\eta = \eta_f + \eta_c$$

De même, la pente de la déformée $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ est la somme de la rotation due à la flexion β_f et de l'angle de cisaillement β_c

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \beta_f + \beta_c$$

avec $\beta_f = \frac{\partial \beta_f}{\partial z}$ et $\beta_c = \frac{\partial \eta_c}{\partial z}$

Les relations qui traduisent les déformations de flexion et de cisaillement s'écrivent respectivement :

$$M = EI \frac{\partial \beta_f}{\partial z}$$

$$Q = K S G \beta_c$$

relations dans lesquelles on a posé :

M : moment de flexion

Q : résultante de cisaillement

G : module d'élasticité transversale

K : facteur de forme, tel que KS soit la section effective pour le cisaillement (pour la section rectangulaire considérée, $K = 2/3$).

Pour un élément de poutre de longueur Δz , le théorème de la résultante dynamique et celui du moment dynamique donnent alors respectivement :

$$\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Delta z = \frac{\partial Q}{\partial z} \Delta z$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \beta_f}{\partial t^2} \Delta z = (Q + \frac{\partial M}{\partial z}) \Delta z$$

D'où en éliminant β , Q et M entre les relations précédentes

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \eta_f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \eta_c}{\partial t^2} \right) - K G \frac{\partial^2 \eta_c}{\partial z^2} = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 \eta_f}{\partial z^3} + K S G \frac{\partial \eta_c}{\partial z} - \rho I \frac{\partial^3 \eta_f}{\partial z \partial t^2} = 0$$

En ne gardant que la déformation totale, on en tirerait l'équation de Timoshenko

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{K G} \right) \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{K G} \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} = 0$$

52. SOLUTION

Nous préférons garder les deux équations déterminant η_f et η_c qui permettront d'exprimer plus aisément les conditions aux limites.

Nous cherchons une solution harmonique (de pulsation ω).

D'autre part, compte tenu de la symétrie de la poutre, et l'origine étant prise en son centre, la solution est une fonction paire de z pour un nombre pair de noeuds et impaire pour un nombre impair de noeuds. Cette solution est, de plus, voisine de celle de l'équation réduite. Pour le mode fondamental, (2 noeuds) nous cherchons donc une solution de la forme

$$\eta_f = (a \cos pz + b \operatorname{ch} qz) \sin \omega t$$

$$\eta_c = (c \cos pz + d \operatorname{ch} qz) \sin \omega t$$

Portant ces expressions dans les équations, il vient :

$$-\rho\omega^2 \left[(a+c) \cos pz + (b+d) \operatorname{ch} qz \right] - KG \left[-cp^2 \cos pz + dq^2 \operatorname{ch} qz \right] = 0$$

$$EI \left[ap^3 \sin pz + bq^3 \operatorname{sh} qz \right] + KSG \left[-cp \sin pz + dq \operatorname{sh} qz \right] + \rho I \omega^2 \left[-ap \sin pz + bq \operatorname{sh} qz \right] = 0$$

D'où par identification :

$$-\rho\omega^2 (a+c) + KGcp^2 = 0$$

$$-\rho\omega^2 (b+d) - KGdq^2 = 0$$

$$EIap^3 - KSGcp - \rho I \omega^2 ap = 0$$

$$EIbq^3 + KSGdq + \rho I \omega^2 bq = 0$$

On en tire :

$$\frac{c}{a} = \frac{\rho\omega^2}{KGp^2 - \rho\omega^2} = \frac{EI p^2 - \rho I \omega^2}{KSG}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{-\rho\omega^2}{KGq^2 + \rho\omega^2} = \frac{EI q^2 + \rho I \omega^2}{-KSG}$$

D'où pour déterminer p et q, les deux équations :

$$(EI p^2 - \rho I \omega^2)(KG p^2 - \rho\omega^2) - \rho S \omega^2 KG = 0$$

$$(EI q^2 + \rho I \omega^2)(KG q^2 + \rho\omega^2) - \rho S \omega^2 KG = 0$$

Nous poserons comme d'habitude $\frac{\rho S}{EI} \omega^2 = m^4$

et d'autre part $I = S k^2$ et $\frac{E}{KG} = \gamma$

Les équations déterminant p et q deviennent ainsi

$$p^4 - (1 + \gamma) k^2 m^4 p^2 - m^4 (1 - \gamma k^4 m^4) = 0$$

$$q^4 + (1 + \gamma) k^2 m^2 q^2 - m^4 (1 - \gamma k^4 m^4) = 0$$

Elles admettent pour solutions

$$p^2 = m^2 \left[\sqrt{1 + \frac{(1-\gamma)^2 m^4 k^4}{4}} + \frac{1+\gamma}{2} m^2 k^2 \right]$$

$$q^2 = m^2 \left[\sqrt{1 + \frac{(1-\gamma)^2 m^4 k^4}{4}} - \frac{1+\gamma}{2} m^2 k^2 \right]$$

Pour toutes les poutres considérées, le rayon de giration de la section droite reste toujours très petit devant la longueur de la poutre. Donc, pour les premiers modes vibratoires la quantité mk reste très petite devant l'unité. Nous la considérerons comme un infiniment petit, et nous effectuerons des développements limités de p^2 et de q^2 en fonction de mk .

On obtient ainsi :

$$p^2 = m^2 \left[1 + \frac{\gamma+1}{2} m^2 k^2 + \frac{(\gamma-1)^2}{8} m^4 k^4 \right]$$

$$q^2 = m^2 \left[1 - \frac{\gamma+1}{2} m^2 k^2 + \frac{(\gamma-1)^2}{8} m^4 k^4 \right]$$

ou encore

$$p = m \left[\left(1 + \frac{\gamma+1}{4} m^2 k^2 + \frac{\gamma^2 - 6\gamma + 1}{32} m^4 k^4 \right) \right]$$

$$q = m \left[\left(1 - \frac{\gamma+1}{4} m^2 k^2 + \frac{\gamma^2 - 6\gamma + 1}{32} m^4 k^4 \right) \right]$$

En nous limitant même au premier ordre, nous aurons :

$$p = m(1 + \alpha) \quad q = m(1 - \alpha)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\gamma+1}{4} m^2 k^2$$

Les constantes définissant la solution sont déterminées par les conditions aux limites de la poutre, c'est-à-dire en écrivant qu'effort tranchant et moment de flexion sont nuls aux extrémités de la poutre, soit :

$$Q = K S G \frac{\partial \eta_c}{\partial z} = K S G (-c p \sin p z + d q \operatorname{sh} q z)$$

$$M = EI \frac{\partial^2 \eta_f}{\partial z^2} = EI (-a p^2 \cos p z + b q^2 \operatorname{ch} q z)$$

$$\text{Donc } \frac{d}{c} = \frac{p \sin \frac{pL}{2}}{q \operatorname{sh} \frac{qL}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \frac{p^2 \cos \frac{pL}{2}}{q^2 \operatorname{ch} \frac{qL}{2}}$$

$$\text{Or, } \frac{d}{c} = \frac{EI q^2 + p I \omega^2}{-EI p^2 + p I \omega^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{q^2 + k_m^4}{-p^2 + k_m^4} \cdot \frac{b}{a}$$

Portant dans les relations précédentes traduisant les conditions aux limites, il vient :

$$\frac{\sin \frac{pL}{2}}{\operatorname{sh} \frac{qL}{2}} = - \frac{1 - 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{1 + 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{\cos \frac{pL}{2}}{\operatorname{ch} \frac{qL}{2}}$$

$$\text{ou : } \sin \frac{pL}{2} \operatorname{ch} \frac{qL}{2} + \cos \frac{pL}{2} \operatorname{sh} \frac{qL}{2} = - 2\alpha \frac{3 - \gamma}{1 + \gamma} \cos \frac{pL}{2} \operatorname{sh} \frac{qL}{2}$$

Comme la solution est voisine de la solution déduite de l'équation réduite, m est voisin de sa valeur m_0 obtenue en considérant cette équation réduite.

Posons donc : $m = m_0 (1 + \varepsilon)$

$$\text{d'où } p = m_0 (1 + \varepsilon + \alpha) \quad \text{et} \quad q = m_0 (1 + \varepsilon - \alpha)$$

Portant ces valeurs dans l'équation précédente et effectuant un développement limité au premier ordre des termes en ε et en α , il vient, compte tenu de

$$\sin \frac{m_0 L}{2} \operatorname{ch} \frac{m_0 L}{2} + \cos \frac{m_0 L}{2} \operatorname{sh} \frac{m_0 L}{2} = 0$$

$$\varepsilon = \alpha \operatorname{th} \frac{m_0 L}{2} \left[\operatorname{tg} \frac{m_0 L}{2} - \frac{2}{m_0 L} \frac{3 - \gamma}{1 + \gamma} \right]$$

Compte tenu de $\text{th} \frac{m_o L}{2} = - \text{tg} \frac{m_o L}{2}$ il vient encore

$$\mathcal{E} = \alpha \text{tg} \frac{m_o L}{2} \left(\text{tg} \frac{m_o L}{2} + \frac{2}{m_o L} \frac{\gamma - 3}{\gamma + 1} \right)$$

53. VALEUR NUMERIQUE

Pour le mode fondamental $m_o L = 3,011 \frac{\pi}{2}$ et $\text{tg} \frac{m_o L}{2} = 0,983$

D'autre part $\gamma = \frac{E}{KG} = \frac{15}{4}$ pour une section rectangulaire

D'où $\mathcal{E} = 0,900 \alpha$

Quant au coefficient α il vaut :

$$\alpha = \frac{1 + \gamma}{4} m^2 k^2 = \frac{1 + \gamma}{4} (mL)^2 \left(\frac{k}{L} \right)^2 = 26,4 \left(\frac{k}{L} \right)^2$$

Pour une section rectangulaire homogène, on a encore :

$$k^2 = \frac{H^2}{12}$$

$$\alpha = \pm 2,21 \left(\frac{H}{L} \right)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = -2,00 \left(\frac{H}{L} \right)^2$$

Ecart pour la période de résonance

Par définition du coefficient $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} = \frac{\Delta m}{m}$

D'où pour la période :

$$\frac{\Delta T}{T} = - \frac{\Delta \omega}{\omega} = - 2 \frac{\Delta m}{m} = - 2 \mathcal{E}$$

Valeur numérique pour une section rectangulaire homogène

$$\frac{\Delta T}{T} = - 2 \mathcal{E} = 4 \left(\frac{H}{L} \right)^2$$

54. POUTRE FLOTTANTE

Lorsqu'on écrit l'équation traduisant le théorème de la résultante dynamique pour un élément de poutre, il convient de tenir compte en plus, de l'action du liquide sur la poutre F. Compte tenu de l'expres-

sion trouvée pour F en négligeant toutes les autres corrections, on a :

$$F = - \rho^S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \left[\frac{J}{\pi \alpha \beta} - 1 \right]$$

Ainsi l'équation devient en posant $\frac{J}{\pi \alpha \beta} = \mu$

$$\rho^S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\text{puis } \rho \left[\frac{\partial^2 \eta_f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \eta_c}{\partial t^2} \right] - K G \frac{\partial^2 \eta_c}{\partial z^2} = 0$$

ce qui conduit aux nouvelles équations en p et en q :

$$p^4 - \frac{\gamma + 1}{\mu} k_m^2 p^2 - m^4 \left(1 - \frac{\gamma k_m^4}{2} \right) = 0$$

$$q^4 + \frac{\gamma + 1}{\mu} k_m^2 p^2 - m^4 \left(1 - \frac{\gamma k_m^4}{2} \right) = 0$$

$$\text{où on a posé cette fois } m^4 = \mu \frac{\rho^S}{EI} \omega^2$$

En se limitant encore aux termes du premier ordre, on aura toujours pour solution approchée

$$p = m (1 + \alpha') \quad \text{et} \quad q = m (1 - \alpha')$$

$$\text{mais avec } \alpha' = \frac{\gamma + 1}{4\mu} m^2 k^2 = \frac{\alpha}{\mu}$$

$$\text{Posons de même } m = m_0 (1 + \alpha')$$

En portant dans les équations précédentes on obtient de la même façon la même expression de $\mathcal{E}'$ en fonction de α' , c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{\mu}$$

De même, pour la période de résonance on aura un écart relatif, par rapport à la période obtenue à partir de l'équation réduite :

$$\frac{\Delta T}{T} = - 2 \mathcal{E}' = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta T_a}{T_a}$$

Enfin, pour le rapport des périodes correspondantes de la poutre flottante et de la poutre libre, l'écart relatif sera :

$$\frac{\Delta\left(\frac{T}{T_a}\right)}{\frac{T}{T_a}} = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{\Delta T_a}{T_a} = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) 2\varepsilon$$

et pour la poutre homogène : $\frac{\Delta(T/T_a)}{T/T_a} = -4 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{H}{L}\right)^2$

Pour les poutres courantes qui ont servi à nos différentes mesures, μ est de l'ordre de 4. On a alors :

$$\frac{\Delta(T/T_a)}{T/T_a} = -3 \left(\frac{H}{L}\right)^2$$

Donc, pour $\frac{H}{L}$ de l'ordre de 0,01 l'écart relatif n'est que de 0,03 %. Pour $\frac{H}{L} = 0,02$, il est de 0,1 % et il ne devient égal à 1 % que pour $\frac{H}{L} = 0,06$.

6. AMORTISSEMENT INTERNE DE LA POUTRE

61. EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT

Hypothèses

Nous nous proposons ici de tenir compte de l'amortissement interne de la poutre, que l'on ne considère plus comme parfaitement élastique. Mais à nouveau nous ne tenons plus compte de l'influence des déformations engendrées par les efforts tranchants et de celle de l'inertie due à la rotation des sections droites.

Nous supposerons le matériau seulement quasi-élastiquement déformable.

Il convient d'abord de choisir une modèle traduisant le comportement de ce matériau.

Dans le modèle de KELVIN, la tension normale n et l'allongement linéique ϵ sont liés par une relation

$$n = E \epsilon + E \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

où E est le module d'élasticité longitudinale et où ν est un coefficient d'amortissement petit (et nul pour le matériau parfaitement élastique)

Dans le modèle de MAXWELL, la relation entre l'allongement linéique et la tension normale est prise de la forme

$$\mu n + \frac{\partial n}{\partial t} = E \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

où le coefficient d'amortissement est cette fois μ .

Ces deux modèles simplifiés conduisent à des équations différentes et à des résultats qualitativement différents et tous deux différents de ceux observés expérimentalement.

Nous admettrons donc un modèle plus général comportant à la fois des termes correctifs du type Kelvin et du type Maxwell. Ainsi, nous admettrons que la tension normale et l'allongement linéique sont liés par une relation

$$\mu n + \frac{\partial n}{\partial t} = E \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + E \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2}$$

Equation

Puisque l'on néglige la déformation de cisaillement, il reste pour la déformation de flexion, en un point de cote y par rapport à la ligne neutre dans une section droite donnée de la poutre

$$\varepsilon = -y \frac{\partial \beta}{\partial z} = -y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}$$

Portant cette expression dans la relation qui a été choisie, puis multipliant par $y dS$ (où dS est l'élément d'aire de la section droite) et intégrant dans le domaine de cette section droite, la relation devient :

$$\mu M + \frac{\partial M}{\partial t} = EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} + \nu EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2}$$

Puisque l'on néglige l'inertie due à la rotation des sections droites, on écrit l'équation du mouvement, simplement en appliquant le théorème de la résultante dynamique à un élément de poutre soit :

$$\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

D'où en tenant compte de $Q = -\frac{\partial M}{\partial z}$, il vient, en portant dans l'équation précédente, après une double dérivation par rapport à z :

$$\mu \rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \rho S \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + EI \frac{\partial^5 \eta}{\partial z^4 \partial t} + \nu EI \frac{\partial^6 \eta}{\partial z^4 \partial t^2} = 0$$

62. PERIODES DE RESONANCE

Nous cherchons une solution de l'équation obtenue, de la forme

$$\eta = Z(z) \exp(i\gamma t)$$

Portant dans l'équation il vient :

$$-\mu \gamma^2 \rho S Z - i \gamma^3 \rho S Z + EI i \gamma Z'''' - \nu EI \gamma^2 Z'''' = 0$$

ou $Z'''' - m^4 Z = 0$ avec

$$m^4 = \frac{\rho S}{EI} \frac{\gamma^2 - i \gamma \mu}{1 + i \gamma \nu}$$

On obtient donc la même équation différentielle pour la déformée de la poutre que dans le cas de la poutre parfaitement élastique, mais avec une expression de m différente.

Sa solution générale est de même

$$Z = A \cos mz + B \sin mz + C \operatorname{ch} mz + D \operatorname{sh} mz$$

et pour les modes normaux comportant un nombre de noeuds pair ou impair, il ne subsiste que les termes pairs ou impairs respectivement.

Ainsi, pour le mode fondamental $Z = Z_0 (\cos mz + A \operatorname{ch} mz)$

Les constantes sont déterminées par les conditions aux limites, qui sont d'ailleurs les mêmes que pour la poutre élastique $Z'''(\frac{L}{2}) = 0$ et $Z''''(\frac{L}{2}) = 0$

On doit donc avoir la même valeur de m c'est-à-dire

$$mL = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

L'expression définissant m s'écrit encore

$$\gamma^2 - i \gamma (\mu + m^4 \frac{EI}{\rho S} \nu) - m^4 \frac{EI}{\rho S} = 0$$

ou, si ω est la pulsation de la poutre élastique correspondante :

$$\omega^2 = m^4 \frac{EI}{\rho S}$$

$$\gamma^2 - i \gamma (\mu + \omega^2 \nu) - \omega^2 = 0$$

ou encore

$$\gamma = \omega \sqrt{1 - (\frac{\mu}{2\omega} + \frac{\omega \nu}{2})^2} + \frac{i}{2}(\mu + \nu \omega^2)$$

Ainsi, en posant $\alpha = \frac{1}{2}(\mu + \nu \omega^2)$

le modèle général que nous avons admis nous a conduit, avec un coefficient d'amortissement visqueux α à une pulsation de résonance $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$

63. RESULTATS

L'amortissement envisagé étant de type visqueux, l'acuité de la résonance est:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\gamma\omega}{2} + \frac{\mu}{2\omega}$$

L'écart entre les périodes de résonance de la poutre élastique et de la poutre quasi-élastique est ΔT tel que

$$\Delta(\omega^2) = -\alpha^2$$

$$\frac{\Delta(\omega^2)}{\omega^2} = -\frac{\alpha^2}{\omega^2} = -\varepsilon^2 = -2 \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Expérimentalement, nous avons constaté que l'acuité de la résonance est de l'ordre de 10^{-2} .

L'écart relatif pour la période de résonance de la poutre, par rapport à la poutre parfaitement élastique serait donc de l'ordre de 10^{-4} . Cette erreur est donc négligeable.

Mais, il est remarquable de noter que l'acuité de résonance a été trouvée expérimentalement sensiblement du même ordre de grandeur pour les différents modes successifs, et aussi sensiblement du même ordre de grandeur dans le cas de la poutre libre et dans le cas de la poutre flottante.

Ce fait confirme que nous ne pouvions pas nous contenter d'un modèle de Kelvin ou d'un modèle de Maxwell qui auraient donné chacun des résultats qualitativement différents :

Avec un modèle de Kelvin, l'acuité de résonance serait réduite au terme $\frac{\gamma\omega}{2}$ qui est proportionnel à la pulsation.

Avec un modèle de Maxwell elle se serait réduite au terme $\frac{\mu}{2\omega}$ qui est lui, inversement proportionnel à la pulsation.

Par contre, la somme de ces deux termes, variant chacun en sens contraire avec la pulsation, varie assez peu avec ω ce qui est conforme aux résultats observés expérimentalement.

7. VISCOSITE DU LIQUIDE

71. FROTTEMENT DU LIQUIDE SUR LA POUTRE

Nous nous proposons ici d'évaluer l'influence sur la période de vibration, du frottement du liquide sur la poutre. Pour effectuer cette évaluation, nous négligeons, à nouveau, tous les termes correctifs qui ont déjà été eux-mêmes évalués séparément.

Le frottement du liquide sur la poutre, ralentissant le mouvement vertical de celle-ci s'exerce le long des flancs de la poutre. Pour étudier cet écoulement dans un plan de section droite de la poutre, il faut maintenant partir des équations de Navier. On a ainsi :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

où ν est le coefficient de viscosité dynamique du liquide.

Pour étudier l'influence de la viscosité sur l'écoulement, nous avons déjà indiqué que nous négligerions à nouveau tous les autres termes correctifs. Or, nous avons vu que nous pouvions considérer comme tels les termes quadratiques pour la vitesse, c'est-à-dire ici les deux premiers termes du premier membre de l'équation de Navier.

Le terme correctif étudié est celui tenant compte de la viscosité du liquide, c'est-à-dire le dernier terme du second membre. Il résulte de la présence de ce terme dans l'équation, un ralentissement de l'écoulement par rapport à l'écoulement du liquide parfait. Ainsi, si on désigne par v_0 la composante verticale de la vitesse de l'écoulement du liquide parfait, on peut poser :

$$v = v_0 + v_1$$

v_0 vérifiant l'équation correspondante, c'est-à-dire

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y} + Y$$

Donc, v_1 vérifiera l'équation

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

On peut noter que d'une part le second terme du second membre est négligeable devant le premier (couche limite), et que d'autre part

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$$

Ainsi, v_1 sera déterminé par l'équation approchée :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$$

La solution de cette équation est $v_1 = \operatorname{Re} \left[a \exp (\sigma x + i \gamma t) \right]$

avec
$$\sigma^2 = \frac{i \gamma}{\nu}$$

(la seule valeur de σ à considérer étant d'ailleurs celle pour laquelle la partie réelle est négative)

Action du liquide sur la poutre :

Le coefficient de frottement est $f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}$

On a donc ici

$$f = \operatorname{Re} \left[\rho' \nu a \exp (i \gamma t) \right]$$

D'où l'action tangentielle exercée par le liquide sur les deux flancs de la poutre, dans un plan de section droite :

$$F = 2 h \rho' \nu \operatorname{Re} \left[\sigma a \exp (i \gamma t) \right]$$

a est déterminé par les conditions aux limites.

En admettant qu'au contact de la poutre, la vitesse v_1 est précisément celle de la poutre, on aura :

$$(v_1)_{x=0} = \eta' = \operatorname{Re} (\xi')$$

en posant $\xi' = a \exp (i \gamma t)$

Avec d'autre part $\rho' h = \rho H$, l'action tangentielle du liquide devient finalement :

$$F = 2 \nu \rho H \operatorname{Re}(\sigma \xi')$$

72. EQUATION DU MOUVEMENT DE LA POUTRE FLOTTANTE ET PERIODE DE RESONANCE

Si on tient compte du terme précédent, l'équation différentielle du mouvement de la poutre devient :

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \rho S \frac{J}{\pi \alpha \beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 2 \rho H \nu \operatorname{Re}(\sigma \xi')$$

avec $\eta = \operatorname{Re}(\xi)$

ξ vérifie donc l'équation

$$EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \rho S k \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2 \rho H \nu \sigma \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

où on a posé $k = \frac{J}{\pi \alpha \beta}$

La solution est de la forme $\xi = A \exp (mz + i \gamma t)$

avec

$$EI m^4 - \rho S k \gamma^2 = 2 i \rho H \nu \sigma \gamma$$

m est déterminé par les conditions aux limites de la poutre. Avec les mêmes conditions aux limites, (effort tranchant et moment de flexion nuls aux extrémités), on obtient la même valeur de m que dans le cas du liquide parfait. Si ω_0 est la pulsation de résonance correspondante pour le cas du liquide parfait. On a :

$$\frac{EI m^4}{\rho S k} = \omega_0^2$$

La relation précédente, déterminant γ , devient donc, compte tenu de cette expression de ω_0 :

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{2 \nu}{k B} i \sigma \gamma$$

ou en élevant au carré $(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 = - \frac{4 \gamma^2}{k_B^2} \sigma^2 \gamma^2$

Le terme correctif étant petit devant les autres, γ reste très voisin de la pulsation

Posons donc $\gamma = \omega_o + \theta$

où θ (complexe) reste petit devant ω_o .

Portant dans la relation précédente, et tenant compte de la valeur de

$$\sigma^2 = \frac{i\gamma}{\gamma}$$

il vient :

$$\theta^2 (\omega_o + \frac{\theta}{2})^2 = - \frac{i\gamma}{k_B^2} (\omega_o + \theta)^3$$

En première approximation on a donc

$$\theta^2 = - \frac{i\gamma\omega_o}{k_B^2}$$

ou $\theta = (-1 + i) \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\gamma\omega_o}{2}}$

La nouvelle pulsation de résonance est donc

$$\omega = \omega_o - \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\gamma\omega_o}{2}}$$

son accroissement est donc

$$\Delta\omega = - \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\gamma\omega_o}{2}}$$

et l'accroissement relatif de la période est donc $\frac{\Delta T}{T} = - \frac{\Delta\omega}{\omega_o}$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega_o}}$$

Ordre de grandeur

Pour une poutre de largeur $B = 0,2$ m pour laquelle la pulsation est de l'ordre de 50 Hz et k de l'ordre de 4, on a sur l'eau, de viscosité dynamique de l'ordre de 10^{-6} m²/s

$$\frac{\Delta T}{T} = 1,2 \cdot 10^{-4}$$

73. ACTION SUR LES EXTREMITES

L'action de frottement du liquide vient d'être envisagée sur les flancs de la poutre, mais elle a été négligée sur ses extrémités.

Si on veut en tenir compte également, on doit écrire que cette action est égale à l'effort tranchant à l'extrémité de la poutre, qui n'est donc plus nul.

On a donc à considérer de nouvelles conditions aux limites, et par conséquent une nouvelle valeur du paramètre m , et par suite une nouvelle période de résonance.

Pour une déformée d'équation

$$\eta = \eta_0 (\cos mz + A \operatorname{ch} mz)$$

L'effort tranchant est

$$Q = EI \eta''' = EI m^3 \eta_0 (\sin mz + A \operatorname{sh} mz)$$

Si on considère que le moment de flexion reste nul aux extrémités, on aura toujours $\eta'' = 0$ aux extrémités, et par conséquent toujours aussi

$$A = \frac{\cos \frac{mL}{2}}{\operatorname{ch} \frac{mL}{2}}$$

D'où l'expression de l'effort tranchant aux extrémités :

$$Q_{L/2} = \frac{EI m^3 \eta_0}{\operatorname{ch} \frac{mL}{2}} \left(\sin \frac{mL}{2} \operatorname{ch} \frac{mL}{2} + \cos \frac{mL}{2} \operatorname{sh} \frac{mL}{2} \right)$$

Posons $m = m_0 + \Delta m$ m_0 étant la valeur de m pour le liquide parfait (cas dans lequel $Q_{L/2}$ est nul)

Portant dans l'expression de l'effort tranchant à l'extrémité, il vient :

$$Q_{L/2} = EI m_0^3 \eta_0 L m \cos \frac{m_0 L}{2}$$

soit, avec $m_0 L = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$

$$Q_{L/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_0 EI L m_0^4 \frac{\Delta m}{m_0}$$

ou encore, compte tenu de $\frac{EI m_0^4}{\rho S} = \omega_0^2$ et $2 \frac{\Delta m}{m_0} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}$

$$Q_{L/2} = \frac{2}{4} \eta_0 \rho S L \omega_0^2 \frac{\Delta \omega}{\omega_0}$$

D'autre part, l'action de frottement du liquide sur l'extrémité de la poutre est, de même que pour le flanc

$$F = \rho S \nu \operatorname{Re}(\sigma' \xi')$$

soit approximativement

$$F = \rho S \nu \sqrt{\frac{\omega_0^2}{2 \nu}} \omega_0 \eta_0$$

En écrivant $F + Q_{L/2} = 0$, on obtient immédiatement
(avec $\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta T}{T}$)

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}}$$

Ce terme correctif est donc de la même forme que celui précédemment calculé pour tenir compte de l'action de frottement du liquide sur le flanc de la poutre. Mais au dénominateur de l'expression, la longueur remplace la largeur.

Ce nouveau terme correctif est donc lui-même négligeable devant le précédent.

8. CONCLUSION

=====

Nous avons explicité les influences exercées séparément sur les périodes de vibration des poutres flottantes de section rectangulaire constante, par différents phénomènes, que nous avons considérés, à priori, comme devant être secondaires. Les résultats obtenus confirment très nettement que ces phénomènes ne sont causes que d'écarts très faibles par rapport aux valeurs obtenues en les négligeant. Qu'il s'agisse de la variation de la hauteur immergée de la poutre au cours de la vibration, des termes quadratiques de la vitesse, de l'inertie de rotation des sections droites de la poutre, des efforts de cisaillement, de l'amortissement interne de la poutre ou de la viscosité du liquide, ces écarts n'atteignent que rarement 1 %. Une cause d'écart un peu plus importante, les écarts correspondants pouvant atteindre 1 à 2 %, est la déformation de la surface libre du liquide, qui a été étudiée dans un cas particulier.

Ainsi, la relation qui avait été établie pour exprimer les périodes de vibration des poutres flottantes de section rectangulaire constante, sans tenir compte de ces phénomènes secondaires, constitue une bonne approximation, comme il avait été constaté expérimentalement.

— 0 —

Nous nous étions proposés, suivant les directives de Monsieur le Recteur PIRONNEAU de reprendre l'étude de ce problème de mécanique pour essayer d'obtenir une expression des périodes naturelles de ces poutres, qui soit d'utilisation commode.

La première expression, de nature empirique, est de forme différente de toutes celles déjà données ; elle est particulièrement simple et commode.

La seconde expression, théorique celle-là, a été obtenue en étudiant directement l'écoulement du liquide autour de la poutre flottante. Elle introduit différents paramètres caractéristiques de la poutre, lesquels ont tous été numériquement calculés en fonction du rapport B/h des dimensions de la section droite.

L'expression théorique obtenue admet d'ailleurs l'expression empirique préliminaire comme première approximation dans un très large domaine d'utilisation.

L'expression théorique ayant été obtenue en formulant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, nous avons encore cherché à déterminer le rôle des différents phénomènes négligés. Pour cela, chacun d'eux a été étudié séparément et son influence sur la période de résonance a pu être appréciée.

Il convenait enfin de comparer les périodes calculées par application de notre expression à celles effectivement mesurées sur des poutres flottantes. Pour cela, de nombreux essais ont été effectués sur des poutres très diverses et en faisant varier systématiquement les différents paramètres de la poutre. L'expérimentation a été faite aussi sur un grand caisson et sur une péniche afin de vérifier que les résultats obtenus pouvaient être appliqués aux poutres de grandes dimensions.

Il résulte de l'ensemble de cette étude que pour prévoir les périodes propres des poutres flottantes prismatiques, même de très grandes dimensions, il est possible et commode d'utiliser les expressions originales que nous proposons.

TABLE DES MATIERES

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

INTRODUCTION

<u>Chapitre 1 - APPROCHE EXPERIMENTALE</u>	7
1. Introduction	8
2. Matériel - Méthode expérimentale	10
3. Influence de l'eau sur l'amortissement	15
4. Essais systématiques en fonction des dimensions	17
5. Résultats des essais	19
6. Interprétation des résultats	37
<u>Chapitre 2 - EXPRESSION THEORIQUE</u>	39
1. Introduction	41
2. Hypothèses - Notations	42
3. Transformation conforme	44
4. Potentiel complexe	48
5. Action du liquide sur la poutre flottante	52
6. Vibrations de la poutre flottante	55
7. Résultats numériques	58
8. Expression approchée	67
9. Conclusion	69
<u>Chapitre 3 - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES</u>	71
<u>EXTENSION AU CAS D'UNE PENICHE</u>	
1. Introduction	73
2. Variation de la largeur	75
3. Variation de la hauteur	80

4. Variation de l'immersion	83
5. Vérifications diverses	86
6. Extension à des poutres de grandes dimensions	89
7. Vibrations d'un caisson métallique	94
8. Vibrations d'une péniche	96
9. Conclusion	99
 <u>Chapitre 4 - POUTRES TRIANGULAIRES</u>	 100
1. Introduction	101
2. Ecoulement autour de la poutre flottante	102
3. Mouvement de la poutre flottante	107
4. Calculs numériques	112
5. Vérifications expérimentales	121
6. Conclusion	126
 <u>Chapitre 5 - PHENOMENES SECONDAIRES - TERMES CORRECTIFS</u>	 127
1. Introduction	129
2. Déformation de la surface libre du liquide	130
3. Variation périodique de l'immersion	139
4. Terme négligé contenant le carré des vitesses	149
5. Inertie de rotation et force de cisaillement	159
6. Amortissement interne de la poutre	167
7. Viscosité du liquide	171
8. Conclusion	177
 <u>CONCLUSION GENERALE</u>	 178

